Équations des courbes et des surfaces

Table des matières

Ce document de mathématiques a été rédigé par Didier VERHILLE.

Les courbes et les surfaces sont omniprésentes dans beaucoup de domaines. Nous les trouvons en conception assistée par ordinateur. Nous les rencontrons dans la modélisation des avions et des voitures. Ils interviennent dans le mouvement des objets et des planètes. Les surfaces sont classées en trois grandes familles : implicites, paramétrées et linéaires par morceaux. Dans ce document, je vais vous présenter quelques notions de base sur les équations cartésiennes des courbes et des surfaces. Je vais également introduire les courbes et les surfaces qui ont des formes ellipsoïdes, hyperboloïdes et paraboloïdes.

1. Représentation paramétrique d’une nappe

Dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, nous pouvons représenter une nappe paramétrée par le graphe d’une application de deux variables, c’est-à-dire par une application $\begin{matrix} f: I \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x,y) \rightarrow (x,y,h(x,y)) \end{matrix}$ définie et continûment dérivable sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}^2$. On a alors dans l’espace une surface représentée par l’application cartésienne $z=h(x,y)$.

Dans le plan $\mathbb{R}^2$, l’équation cartésienne devient $y=f(x)$.

Une nappe paramétrée associée à une courbe d’équation cartésienne $z=h(x,y)$ est dite régulière si l’application h est de classe C_1 .

Soit l’application $\begin{matrix} f: I \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x,y,z) \rightarrow f(x,y,z) \end{matrix}$ définie et continûment dérivable sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}^3$. L’ensemble des points de coordonnées $M(x,y,z)$ vérifiant l’équation $f(x,y,z)=0$ est également une surface. Ainsi, cette surface est définie par l’équation implicite $f(x,y,z)=0$. Si l’équation implicite

$f(x,y,z)=0$ peut être résolue en z , on est alors ramené à l'étude de l'équation cartésienne $z=h(x,y)$. C'est le cas quand $\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)\neq 0$.

2. Équation d'une courbe dans le plan

Dans un plan cartésien $\mathbb{R}^2$, prenons pour origine le point de coordonnées $O(0,0)$ et pour base $B=(O,\vec{i},\vec{j})$.

Soit l'application $\begin{matrix} f: I\subset\mathbb{R}^2\rightarrow\mathbb{R} \\ (x,y)\rightarrow f(x,y)\end{matrix}$ définie et continûment dérivable dans un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}^2$. L'ensemble des points de coordonnées $M(x,y)$ du plan vérifiant la relation $f(x,y)=0$ s'appelle la courbe d'équation $f(x,y)=0$, appelée aussi équation implicite.

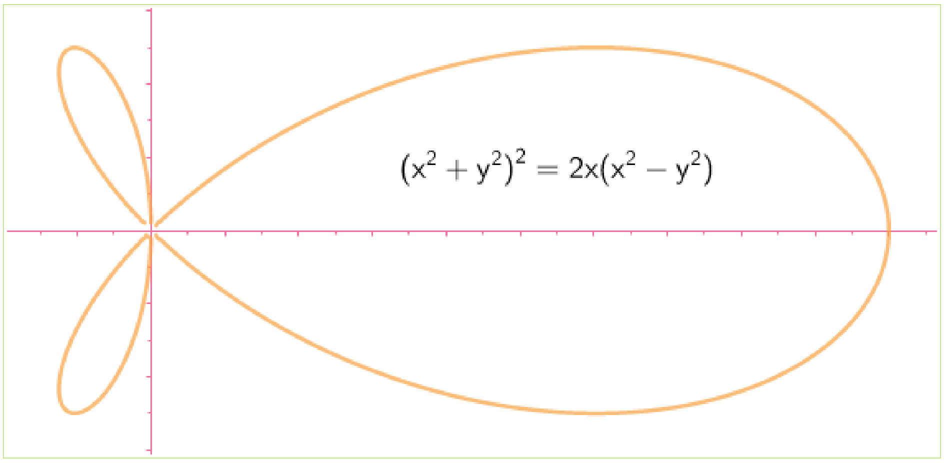
Quelques exemples de courbes dans le plan

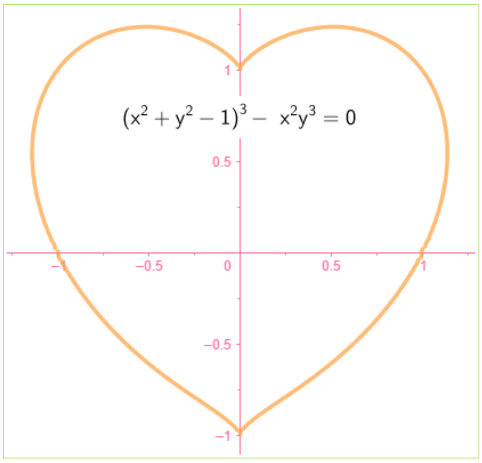
Une courbe d'équation implicite $f(x,y)=(x^2+y^2-1)^3-x^2y^3=0$ représente dans le plan la courbe d'un cœur.

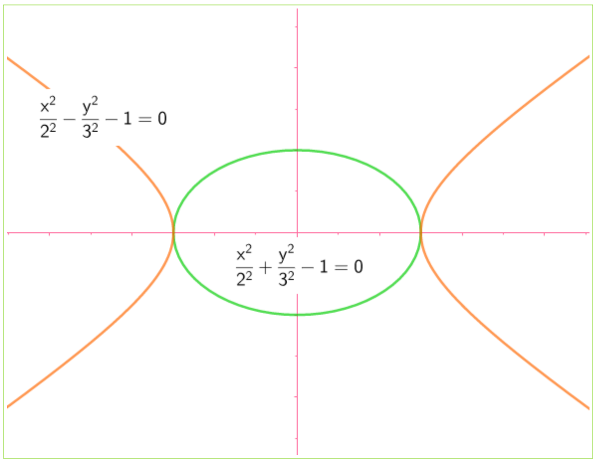
Une courbe d'équation implicite $f(x,y)=(x^2+y^2)^2-2x(x^2-y^2)=0$ représente dans le plan la courbe d'une torpille.

La famille de courbes d'équation implicite $f(x,y)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$ où $0<b<a$ représente des courbes ayant la forme d'une ellipse.

La famille de courbes d'équation implicite $f(x,y)=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1=0$ où $a>0$, $b>0$ représente des courbes ayant la forme d'une hyperbole.







Si f est une application $\begin{matrix} f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R} \\ x\rightarrow f(x)\end{matrix}$, la courbe d'équation implicite $g(x,f(x))=0$ s'appelle le graphe de f . Son équation cartésienne s'écrit $y=f(x)$.

La courbe d'équation $x^2+y^2+1=0$ est l'ensemble vide.

La courbe d'équation $x^2+y^2=0$ est le point $(0,0)$.
La courbe d'équation $11=11\,(0=0)$ est le plan ou l'espace tout entier.

Jusqu'à présent, nous sommes partie d'une équation implicite de la forme $f(x,y)=0$ et nous avons défini une courbe dans le plan. Nous pouvons également partir d'une courbe dans le plan et d'essayer de chercher une application f telle que son équation implicite $f(x,y)=0$ s'exprime de façon simple à l'aide de fonctions classiques.

3. Équation d'une nappe dans l'espace

Dans l'espace ordinaire $\mathbb{R}^3$, prenons pour origine le point de coordonnées $O(0,0,0)$ et pour base $B=(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

Soit l'application $\begin{array}{c} f: I\subset\mathbb{R}^3\rightarrow\mathbb{R} \\ (x,y,z)\rightarrow f(x,y,z) \end{array}$ définie et continûment dérivable dans un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}^3$. L'ensemble des points de coordonnées $M(x,y,z)$ de l'espace vérifiant la relation $f(x,y,z)=0$ s'appelle une surface d'équation implicite $f(x,y,z)=0$.

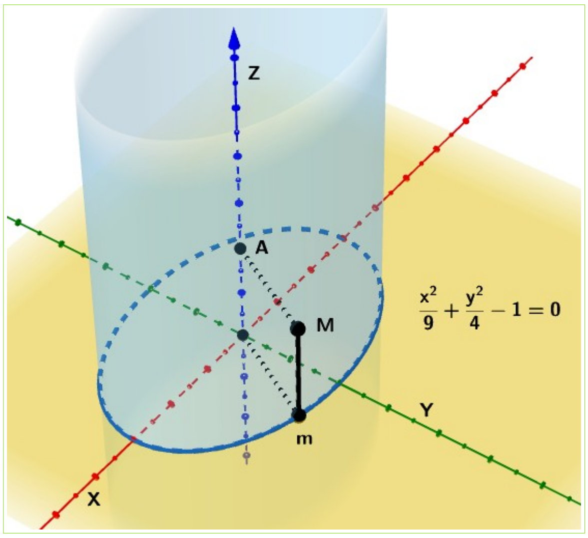
Une surface d'équation $ax+by+cz+d=0$ où $(a,b,c)\neq(0,0,0)$ représente l'équation d'un plan dans l'espace.

Une surface d'équation $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$ représente l'équation d'une sphère dans l'espace dont le rayon est R et le centre de la sphère a pour coordonnées (x_0,y_0,z_0) .

Projection d'une courbe dans un plan

Soient M un point de coordonnées (x,y,z) dans l'espace $\mathbb{R}^3$ et m sa projection sur le plan xOy .

L'équation implicite $f(x,y,0)=0$ correspondant à $z=0$ ne fait pas intervenir la dimension z . Cette équation implicite représente une courbe (Γ) dans le plan xOy . Pour que la projection orthogonale du point $M(x,y,z)$ de l'espace appartienne à la courbe (Γ) , il faut que le point de coordonnées $m(x,y,0)$, le projeté du point $M(x,y,z)$ sur le plan xOy , appartienne à la courbe (Γ) . Dans ce cas, la surface d'équation $f(x,y,z)=0$ dans l'espace est un cylindre de directrice (Γ) et de génératrice parallèle à Oz .



4. Équation d'une courbe dans l'espace

L'intersection de deux surfaces définit généralement une courbe dans l'espace. Ce n'est néanmoins pas toujours vrai, l'intersection pouvant être vide, réduite à un point ou bien même être une surface.

Dans la suite du document, supposons que l'intersection de deux surfaces n'est pas vide et définit bien une courbe (Γ) .

Une courbe (Γ) dans l'espace peut être représentée par un système de deux équations de surfaces (Σ_1) et (Σ_2) qui se coupent dans l'espace.

Si l'équation implicite $f_1(x,y,z)=0$ représente la surface (Σ_1) et l'équation implicite $f_2(x,y,z)=0$ représente la surface (Σ_2) , alors l'intersection des deux nappes définit une courbe (Γ) dans l'espace.

En résumé, $(\Sigma_1) \cap (\Sigma_1) \neq \emptyset \Rightarrow \textit{La courbe } (\Gamma) \textit{ est définie.}$

Par exemple, soient les nappes planes (Σ_1) d'équation $ax+by+cz+d=0$ où $(a,b,c)\neq(0,0,0)$ et (Σ_2) d'équation $a'x+b'y+c'z+d'=0$ où $(a',b',c')\neq(0,0,0)$. On suppose également que les deux vecteurs (a,b,c) et (a',b',c') sont linéairement indépendants. Alors l'intersection des deux nappes planes (Σ_1) et (Σ_2) définissent une droite dirigée par le vecteur $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$.

Maintenant, supposons une courbe définie par un système d'équations implicites de la forme $\begin{matrix} f_1(x,y,z)=0 \\ f_2(x,y,z)=0 \end{matrix}$.

Un point $M(x,y,z)$ appartient à la courbe s'il appartient à la fois aux surfaces $f_1(x,y,z)=0$ et $f_2(x,y,z)=0$.

Notons que le point $m(x,y,0)$ pour $z=0$ est le projeté orthogonal de $M(x,y,z)$ sur le plan xOy . Si l'on arrive à éliminer z des équations $f_1(x,y,z)=0$ et $f_2(x,y,z)=0$, c'est-à-dire si l'on obtient une relation du type $g(x,y)=0$, les coordonnées du point g vérifient les équations $\begin{matrix} g(x,y)=0 \\ z=0 \end{matrix}$.

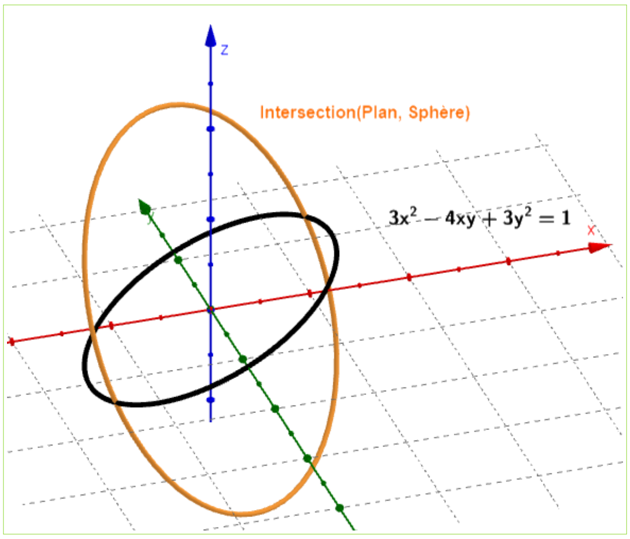
Projection d'un cercle sur un plan

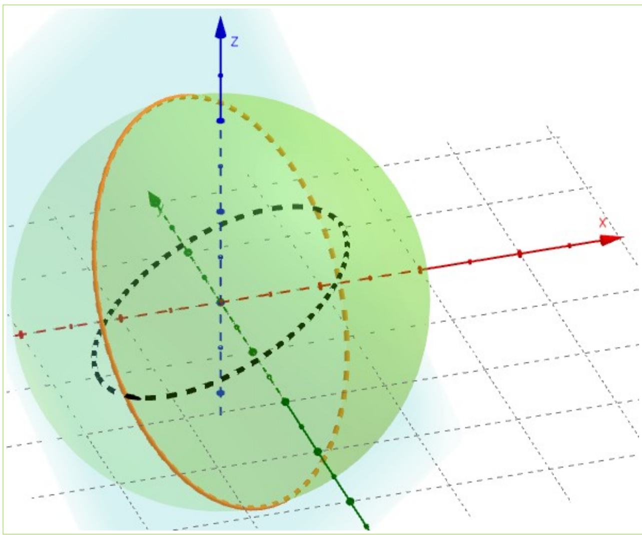
Par exemple, supposons que la courbe (Γ) soit définie par le système d'équation représentant une sphère et un plan dans l'espace $\begin{matrix} x^2+y^2+z^2-1=0 \\ x-y+\dfrac{1}{\sqrt{2}}z=0 \end{matrix}$.

Ce système d'équations implicites est équivalent à $\begin{matrix} x^2+y^2+2(x-y)^2=1 \\ z=-\sqrt{2}(x-y) \end{matrix}$.

La courbe (Γ) représente un cercle dans l'espace d'altitude z .

La projetée du cercle (Γ) sur le plan xOy est une ellipse de centre $O(0,0)$ et d'équation cartésienne $3x^3-4xy+3y^2=1$.





5. Plans tangents en un point

Remarque sur le produit scalaire : Le produit scalaire permet de calculer des équations de droites, de plans, de définir l'orthogonalité de vecteurs et de faire des démonstrations et divers calculs en géométrie.
L'équation cartésienne d'un plan à partir du produit scalaire est définie de la façon suivante :
Soient $M_0(x_0, y_0, z_0)$ un point donné de (P) et $\vec{N}(a,b,c)$ un vecteur non nul normal au point $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Soit $M(x,y,z)$ un point quelconque de l'espace. Le point $M(x,y,z) \in (P)$, ssi le vecteur $\vec{M_0 M}$ est orthogonal au vecteur normal $\vec{N}$.
C'est-à-dire ssi le produit scalaire $\vec{M_0 M}.\vec{N}=0$.
$\vec{M_0 M}.\vec{N}=0 \Leftrightarrow a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0 \Leftrightarrow ax+by+cz+d=0$ où d est une constante.
C'est l'équation cartésienne du plan (P) au point de coordonnées $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

Rappel sur les fonctions implicites $\begin{matrix} f: I \in \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x,y,z) \rightarrow f(x,y,z) \end{matrix}$ de classe C^k définies sur un ouvert I de $\mathbb{R}^3$:

Dans le cas où une surface (Σ) est définie par une équation implicite de la forme $f(x,y,z)=0$, et si l'une des dérivées partielles de f en $M_0(x_0, y_0, z_0)$ est non nulle, alors le plan tangent (P) en $M_0(x_0, y_0, z_0)$ a pour équation scalaire $\vec{MM_0}.\vec{grad} f(M_0)=0$ où $M(x,y,z) \neq M_0(x_0, y_0, z_0)$ est un petit déplacement de $M_0(x_0, y_0, z_0)$ sur la surface (Σ) . Les vecteurs $\vec{MM_0}$ et $\vec{grad} f(M_0)$ sont perpendiculaires entre-eux.

Sous la forme cartésienne, le plan tangent (P) s'écrit :

$$\vec{MM_0}.\vec{grad} f(M_0)=0 \Leftrightarrow (x-x_0)\frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial x}+(y-y_0)\frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial y}+(z-z_0)\frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial z}=0$$

Le vecteur normale non nul $\vec{N}$ à la surface au point $M_0(x_0, y_0, z_0)$ a pour vecteur directeur $\vec{grad} f(M_0)$ et son équation vectorielle s'écrit $\vec{N}=\vec{NM_0}=k\,\vec{grad} f(M_0),\ k \in \mathbb{R}$ où $N(x,y,z) \neq M_0(x_0, y_0, z_0)$ est un petit déplacement de $M_0(x_0, y_0, z_0)$ sur le vecteur directeur $\vec{grad} f(M_0)$.

Sous la forme cartésienne, l'équation du vecteur normale en $M_0(x_0, y_0, z_0)$ s'écrit :

$$k=\frac{(x-x_0)}{\frac{\partial f(x_0,y_0,z_0)}{\partial x}}=\frac{(y-y_0)}{\frac{\partial f(x_0,y_0,z_0)}{\partial y}}=\frac{(z-z_0)}{\frac{\partial f(x_0,y_0,z_0)}{\partial z}}$$

Soit la courbe (Γ) définit par le système d'équation représenté par deux surfaces $\begin{matrix}(\Sigma_1):f_1(x,y,z)=0\\(\Sigma_2):f_2(x,y,z)=0\end{matrix}$.

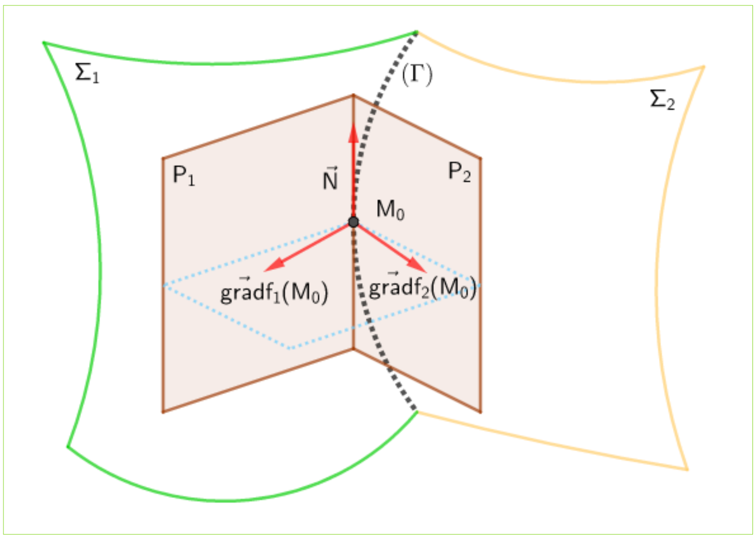
Ces deux surfaces admettent chacune un plan tangent, notés respectivement (P_1) et (P_2) , en tout point $M_0(x_0,y_0,z_0)$ de la courbe (Γ) . La droite résultante de l'intersection des deux plans tangents (P_1) et (P_2) est une droite tangente en $M_0(x_0,y_0,z_0)$. Cette droite tangente en $M_0(x_0,y_0,z_0)$ admet pour vecteur directeur $\vec{T}=\vec{grad} f_1(M_0)\wedge\vec{grad} f_2(M_0)$.

$$\vec{T}=\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)\\\frac{\partial f_1}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)\\\frac{\partial f_1}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}\frac{\partial f_2}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)\\\frac{\partial f_2}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)\\\frac{\partial f_2}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1\partial f_2}{\partial y\partial z}(x_0,y_0,z_0)-\frac{\partial f_1\partial f_2}{\partial z\partial y}(x_0,y_0,z_0)\\\frac{\partial f_1\partial f_2}{\partial x\partial z}(x_0,y_0,z_0)-\frac{\partial f_1\partial f_2}{\partial z\partial x}(x_0,y_0,z_0)\\\frac{\partial f_1\partial f_2}{\partial x\partial y}(x_0,y_0,z_0)-\frac{\partial f_1\partial f_2}{\partial y\partial x}(x_0,y_0,z_0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}T_x\\T_y\\T_z\end{pmatrix}$$

Sous la forme cartésienne, l'équation de la normale en $M_0(x_0,y_0,z_0)$ s'écrit :
$$k=\frac{(x-x_0)}{T_x}=\frac{(y-y_0)}{T_y}=\frac{(z-z_0)}{T_z}$$

Et l'équation du plan normal à la courbe (Γ) est le plan définit par les vecteurs linéairement indépendants $\vec{grad} f_1(M_0)$ et $\vec{grad} f_2(M_0)$ au point $M_0(x_0,y_0,z_0)$.

Cette équation est définie par ce déterminant : $\begin{vmatrix}x-x_0 & \frac{\partial f_1}{\partial x}(M_0) & \frac{\partial f_2}{\partial x}(M_0)\\y-y_0 & \frac{\partial f_1}{\partial y}(M_0) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(M_0)\\z-z_0 & \frac{\partial f_1}{\partial z}(M_0) & \frac{\partial f_2}{\partial z}(M_0)\end{vmatrix}=0$



6. Recherche d'équations de surfaces

Soit une courbe (Γ) définit par un système d'équations représenté par deux surfaces $\begin{array}{l}(\Sigma_1): f_1(x,y,z)=0\\(\Sigma_2): f_2(x,y,z)=0\end{array}$.

Soit $S(x_0,y_0,z_0)$ un point n'appartenant pas à la courbe (Γ).

Soit un cône (Σ) de sommet $S \notin (\Gamma)$ et de directrice (Γ).

Quelles sont les équations des surfaces (Σ_1) et (Σ_2) ?

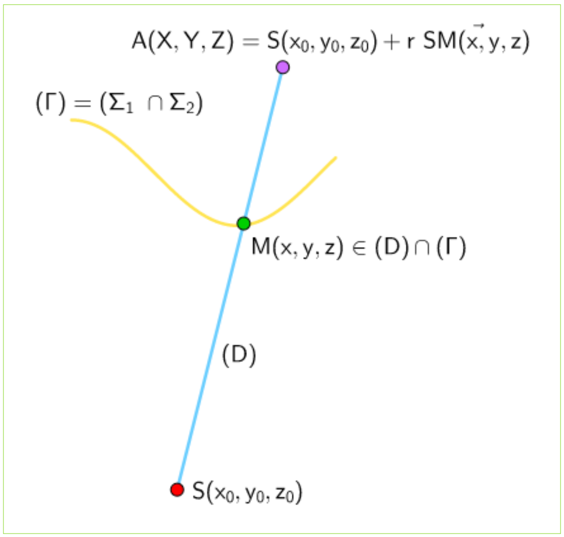
Pour qu'un point $M(x,y,z)$ distinct de $S(x_0,y_0,z_0)$ de l'espace appartienne à la courbe (Γ), il faut et il suffit que la droite (SM) rencontre la courbe (Γ).

Or, $\forall (X,Y,Z) \in (D)$, l'équation paramétrique de la droite dans l'espace est de la forme $X=x_0+r(x-x_0)$, $Y=y_0+r(y-y_0)$, $Z=z_0+r(z-z_0)$ où r est un paramètre.

Pour que le point de coordonnées (X,Y,Z) appartienne aux surfaces (Σ_1) et (Σ_2), il faut et il suffit que le point vérifie le système d'équations

$$\begin{array}{l}(\Sigma_1): f_1(X,Y,Z)=f_1(x_0+r(x-x_0),y_0+r(y-y_0),z_0+r(z-z_0))=0\\(\Sigma_2): f_2(X,Y,Z)=f_2(x_0+r(x-x_0),y_0+r(y-y_0),z_0+r(z-z_0))=0\end{array}$$

En éliminant le paramètre r des équations du système, on peut définir les équations des surfaces (Σ_1) et (Σ_2).



7. Surfaces de révolution

Définition

Soit (Δ) une droite. Une surface (Σ) s'appelle une surface de révolution d'axe de révolution (Δ) si la surface (Σ) est invariante autour de l'axe de révolution (Δ). Cette définition peut également s'exprimer de la façon suivante : si $M(x,y,z)$ est un point sur la surface (Σ), le cercle d'axe (Δ) et passant par le point $M(x,y,z)$ est contenu dans la surface (Σ). Ainsi, une surface de révolution d'axe (Δ) est formée d'une famille de cercles d'axe (Δ).

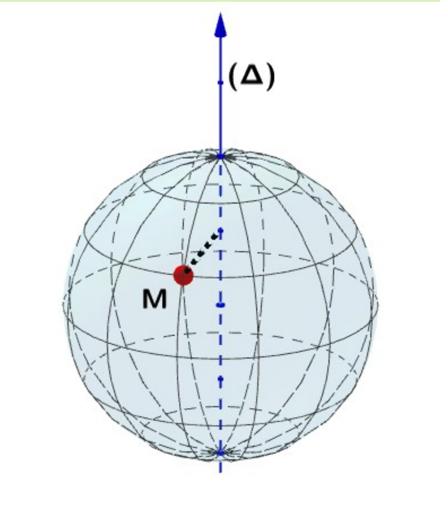
L'intersection de la surface avec un plan contenant l'axe (Δ) s'appelle une méridienne. La méridienne est symétrique par rapport à l'axe de révolution.

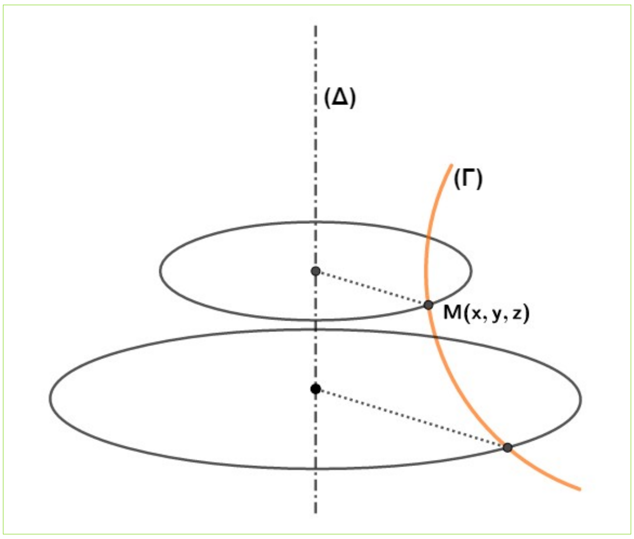
L'intersection de la surface avec un plan perpendiculaire à l'axe (Δ) s'appelle un parallèle.

Soit (Γ) une courbe directrice. La plus petite surface de révolution d'axe (Δ) contenant (Γ) est la réunion (Σ) des cercles d'axes (Δ) menés par les points de

(Γ) . On dit que (Σ) est la surface de révolution d'axe (Δ) et de directrice (Γ) .

Soient (Σ) une surface de révolution d'axe (Δ) et (Γ) une méridienne de (Σ) . Alors (Σ) est la surface de révolution d'axe (Δ) et de directrice (Γ) .





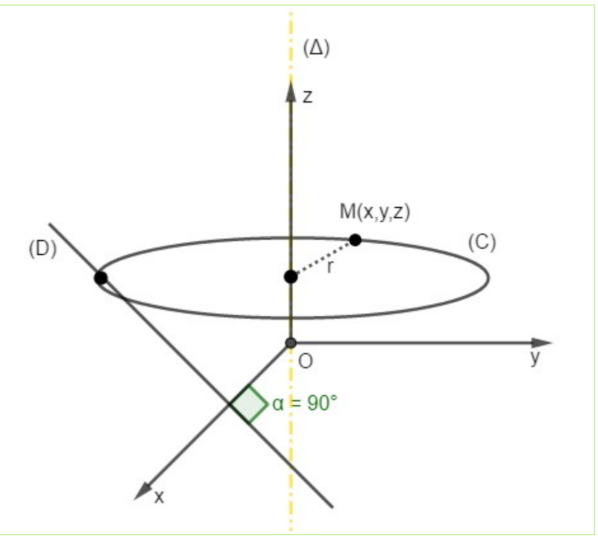
8. Équation d'une surface de révolution

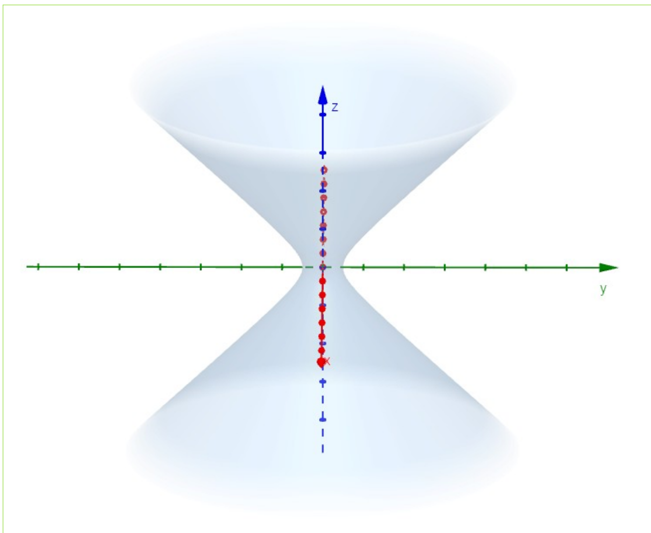
Premier exemple

Soit un repère orthonormé $B=(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. Soient deux droites (Δ) et (D) qui ne sont ni parallèle ni perpendiculaire et qui ne se rencontrent jamais. Supposons que l'axe Oz soit porté par la droite (Δ) et que l'axe Ox soit perpendiculaire à (Δ) et à (D) . On suppose que (Σ) est la surface de révolution d'axe (Δ) et de directrice (D) .

Alors, on peut dire que la droite (D) ait pour application dans B :

$X=a \text{ et } Z=mY,\ a=cste,\ m\neq 0$





Supposons un point M de coordonnées (x,y,z) appartenant à la surface (Σ) . Il existe un cercle (C) d'axe de révolution (Δ) passant par M et rencontrant la droite (D) .

Dans la base B , le cercle (C) a pour équations $Z=z$ et $X^2+Y^2=x^2+y^2=r^2$ où r est le rayon du cercle (C) dépendant de z et de a .

En éliminant les paramètres X, Y, Z des équations $X=a$ *et* $Z=mY$, $a=cste$, $m\neq 0$, $X^2+Y^2=x^2+y^2=r^2$ et $Z=z$, on en déduit l'équation $x^2+y^2=a^2+\frac{z^2}{m^2}$.

Ainsi, l'équation de la surface (Σ) est $x^2+y^2=a^2+\frac{z^2}{m^2}$.

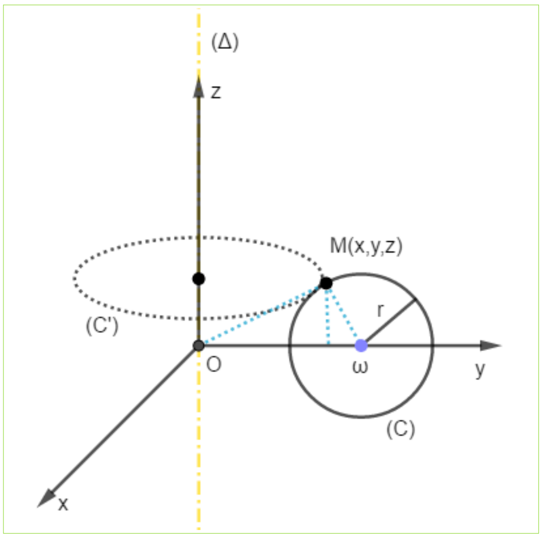
Pour définir la forme de la méridienne de la surface (Σ) , supposons que $x=0$. L'intersection de la surface (Σ) avec le plan yOz contenant l'axe (Δ) s'appelle une méridienne.

Ainsi, pour $x=0$, l'équation de la surface (Σ) est $y^2=a^2+\frac{z^2}{m^2}$.

La méridienne de (Σ) a la forme d'une hyperbole dans le plan yOz d'axes de symétrie Oy et Oz .

Second exemple

Soit un repère orthonormé $B=(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. Soient une droite (Δ) portée par l'axe Oz et un cercle (C) de centre ω tel que $\omega\notin(\Delta)$. On suppose que l'axe Oy passe par ω et que (Σ) soit la surface de révolution d'axe (Δ) et de directrice (C) .



Les équations du cercle (C) dans la base B sont :
$X=0$ et $(Y-a)^2+Z^2=r^2$ où r est le rayon du cercle (C) et $a=d(O,\omega)$.

Le cercle (C') a pour équation : $Z=z$ et $X^2+Y^2=x^2+y^2$.

Pour qu'un point M de coordonnées (x,y,z) sur le cercle (C') appartienne à la surface (Σ) , il faut et il suffit qu'il rencontre le cercle (C) .
Des équations :
$X=0$, $(Y-a)^2+Z^2=r^2$, $Z=z$, $X^2+Y^2=x^2+y^2$, on peut définir l'équation de la surface (Σ) en éliminant les paramètres X, Y, Z .

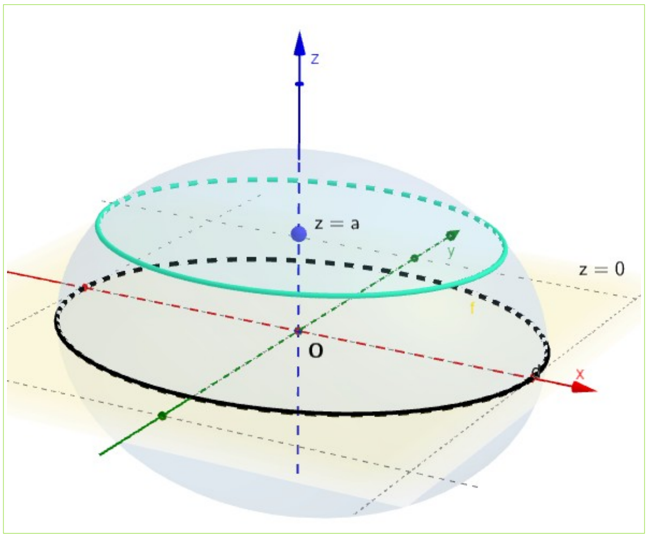
C'est-à-dire : $(Y-a)^2+Z^2=r^2=(Y-a)^2+z^2=Y^2-2aY+a^2+z^2=x^2+y^2-2a\sqrt{x^2+y^2}+a^2+z^2=r^2$.

L'équation de la surface (Σ) est $x^2+y^2+z^2+a^2-r^2-2a\sqrt{x^2+y^2}=0$.

9. Ellipsoïde

Une ellipsoïde est une surface (Σ) du second degré qui admet dans une base orthonormée une équation de la forme $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$ où a,b,c sont trois constantes strictement positives.

$x=0$, $y=0$ et $z=0$ sont des plans de symétrie de l'ellipsoïde.
Ox , Oy et Oz sont des axes de symétrie de l'ellipsoïde.
O est le centre de symétrie de l'ellipsoïde.



$(\Sigma)\cap(x0y)$ est une ellipse d'équations : $z=0$ et $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-1=0$.

$(\Sigma)\cap(y0z)$ est une ellipse d'équations : $x=0$ et $\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{b^2}-1=0$.

$(\Sigma)\cap(x0z)$ est une ellipse d'équations : $y=0$ et $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{b^2}-1=0$.

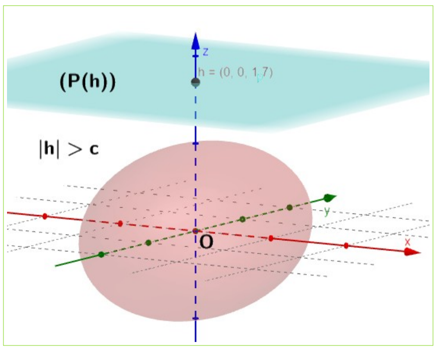
Pour un plan $(P(h))$ où h est une hauteur varible sur z , $(\Sigma)\cap(P(h))$ est une ellipsoïde d'équations : $z=h$ et $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{h^2}{c^2}-1=0$.

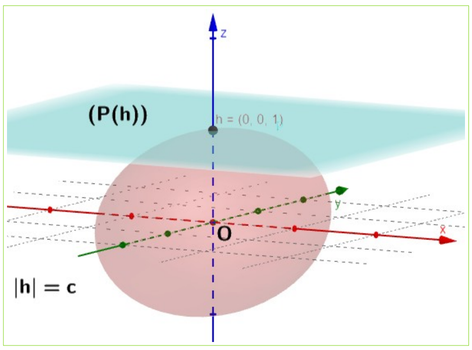
Selon les valeurs de la constante $\dfrac{h^2}{c^2}-1$, il existe trois cas de figure.

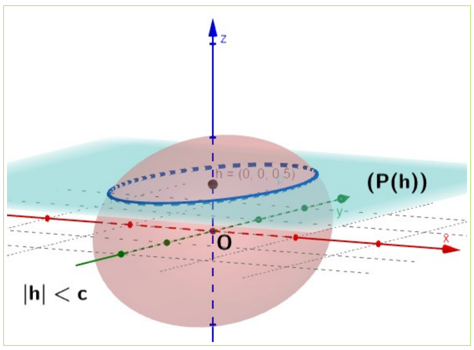
Si $\dfrac{h^2}{c^2}-1>0$, c'est-à-dire $|h|>c$, on a $(\Sigma)\cap(P(h))=\emptyset$

Si $\dfrac{h^2}{c^2}-1=0$, c'est-à-dire $|h|=c$, $(\Sigma)\cap(P(h))$ est réduit à un seul point de coordonnées h sur l'axe Oz .

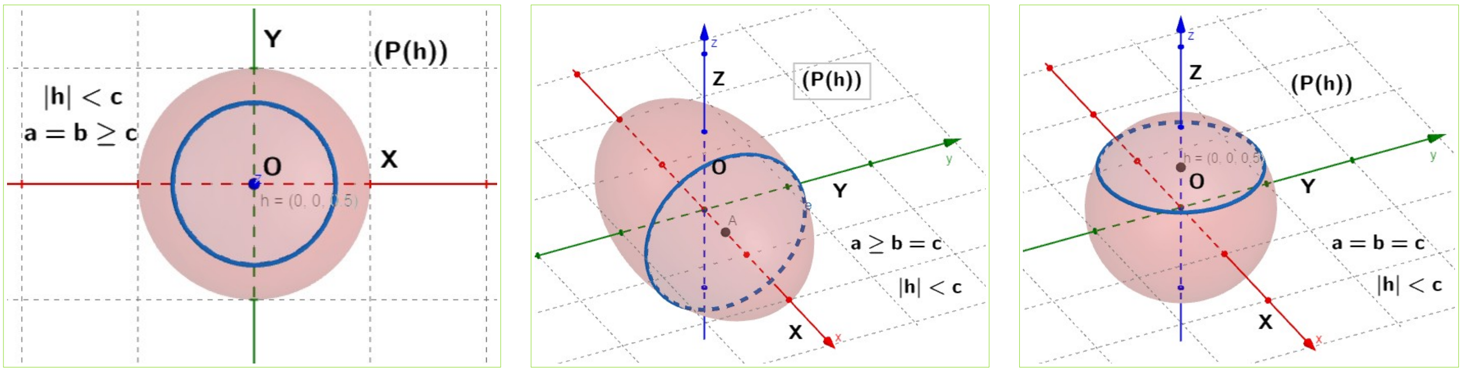
Si $\dfrac{h^2}{c^2}-1<0$, c'est-à-dire $|h|<c$, posons $\dfrac{h^2}{c^2}-1=-\lambda^2$ avec $\lambda>0$, alors $(\Sigma)\cap(P(h))$ a pour équation $z=h$ et $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\lambda^2=\dfrac{x^2}{(\lambda a)^2}+\dfrac{y^2}{(\lambda b)^2}-1=0$.







Si $a=b=c$, alors (Σ) est une sphère.
Si $a=b\geq c$, alors $(\Sigma)\cap(P(h))$ sont des cercles d'axe Oz .
Si $a\geq b=c$, alors $(\Sigma)\cap(P(h))$ sont des cercles d'axe Ox .



10. Hyperboloïde

Une hyperboloïde est une surface (Σ) du second degré qui admet dans une base orthonormée une équation de la forme $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}+1=0$ où a,b,c sont trois constantes strictement positives. On dit que la surface (Σ) est une hyperboloïde à deux nappes.

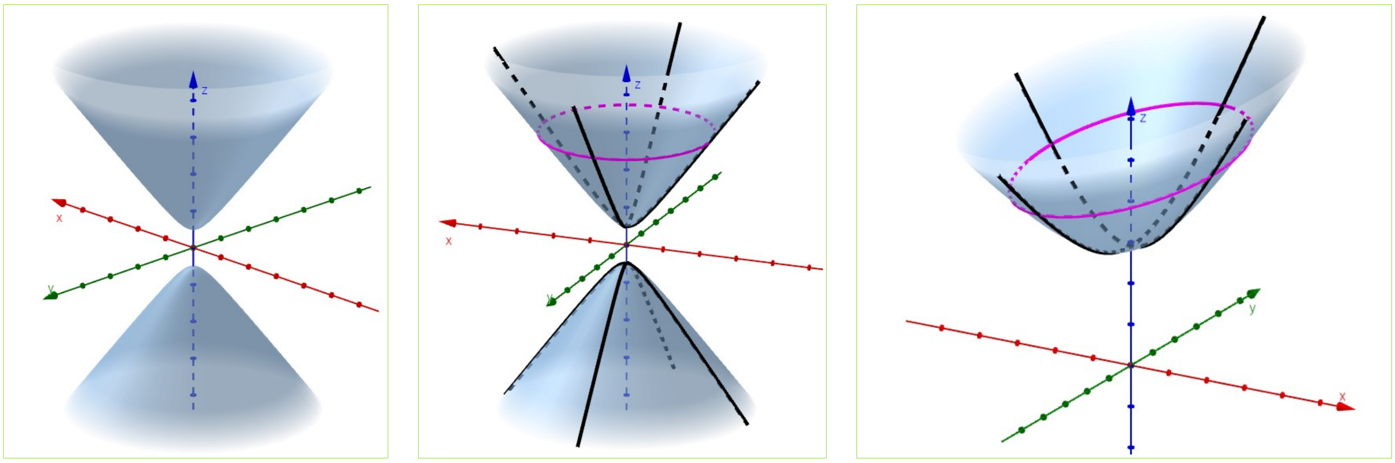
$x=0$, $y=0$ et $z=0$ sont des plans de symétrie de l'hyperboloïde.
Ox , Oy et Oz sont des axes de symétrie de l'hyperboloïde.
O est le centre de symétrie de l'hyperboloïde.

Pour un plan $(P(h))$ où h est une hauteur variable sur z , $(\Sigma)\cap(P(h))$ est une hyperbole d'équations : $z=h$ et $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{h^2}{c^2}+1=0$.

Posons $-\frac{h^2}{c^2}+1=-\lambda^2$ avec $\lambda>0$, alors $(\Sigma)\cap(P(h))$ a pour équation :

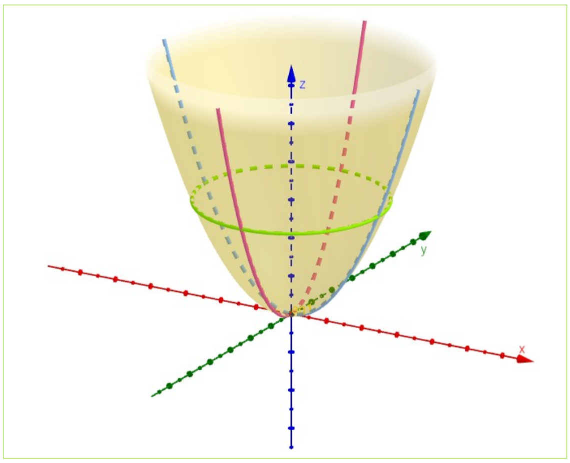
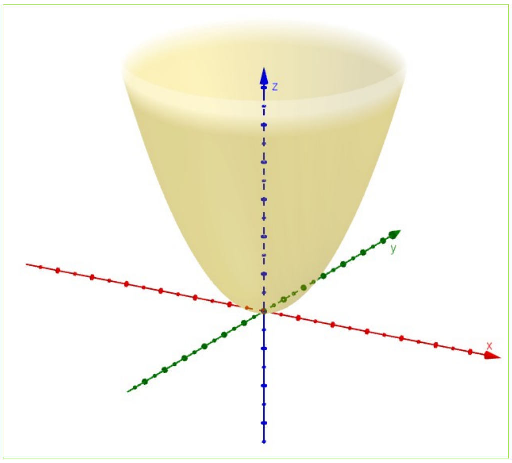
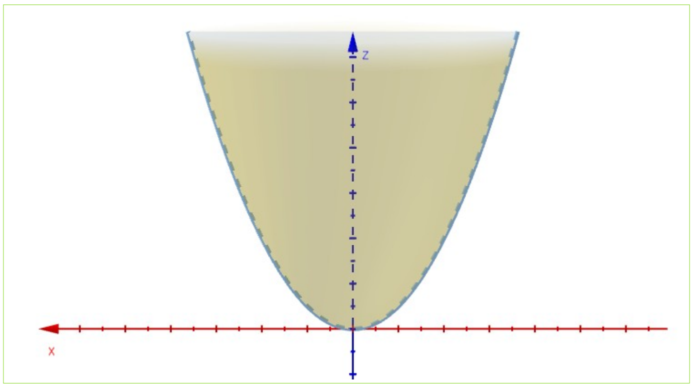
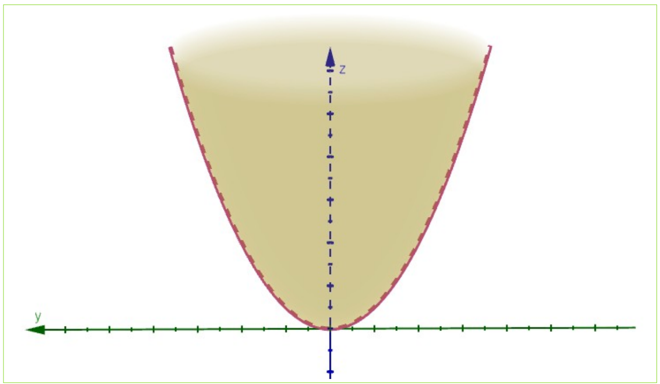
$z=h$ et $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\lambda^2=\frac{x^2}{(\lambda a)^2}+\frac{y^2}{(\lambda b)^2}-1=0$.

C'est une famille d'ellipses homothétiques à deux nappes.
Si $a=b$, on a l'équation d'un cercle de rayon $(\lambda a)^2$, alors l'axe Oz est un axe de révolution.



11. Paraboloïde elliptique

Une paraboloïde elliptique est une surface (Σ) du second degré qui admet dans une base orthonormée une équation de la forme $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-2z=0$ où a,b sont deux constantes strictement positives.

Les plans xOz et yOz sont des axes de symétrie du paraboloïde elliptique.
L'axe Oz est un axe de symétrie du paraboloïde elliptique.

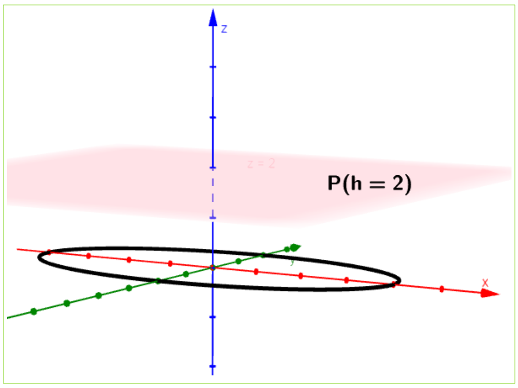
$(\Sigma)\cap(x0z)$ a pour équation $y=0$ et $x^2=2a^2z$; C'est l'équation d'une parabole dans le plan $x0z$.

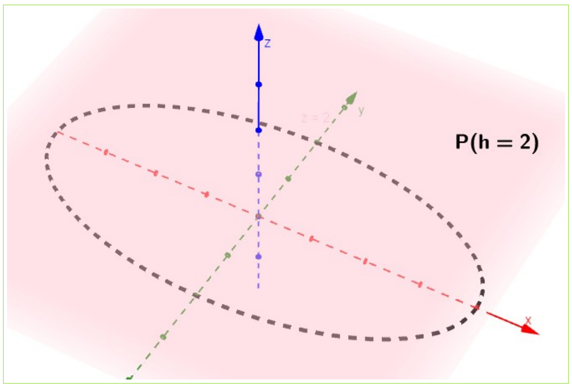
$(\Sigma)\cap(y0z)$ a pour équation $x=0$ et $y^2=2b^2z$; C'est l'équation d'une parabole dans le plan $y0z$.

$(\Sigma)\cap(x0y)$ a pour équation $z=0$ et $y^2=\frac{b^2}{a^2}x^2,\ a\neq 0 \Leftrightarrow y=\pm\frac{b}{a}x,\ a\neq 0$; C'est l'équation de deux droites dans le plan $(x0y)$.

Pour un plan $(P(h))$ où h est une hauteur variable sur z , $(\Sigma)\cap(P(h))$ est une ellipse d'équations : $z=h$ et $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-2h=0$ si $h>0$.
Si $h=0$, $(\Sigma)\cap(P(h))=\{0\}$
Si $h<0$, $(\Sigma)\cap(P(h))=\emptyset$

Si $a=b$, on a l'équation d'un cercle de rayon $2ha^2$, alors l'axe Oz est un axe de révolution.





12. Paraboloïde hyperbolique

Une paraboloïde hyperbolique est une surface (Σ) du second degré qui admet dans une base orthonormée une équation de la forme $\frac{x^2}{a}-\frac{y^2}{b}-2z=0$ où a,b sont deux constantes.

Les plans xOz et yOz sont des axes de symétrie du paraboloïde hyperbolique.
L'axe Oz est un axe de symétrie du paraboloïde hyperbolique.

$(\Sigma)\cap(x0z)$ a pour équation $y=0$ et $x^2=2az$; C'est l'équation d'une parabole dans le plan $x0z$.
$(\Sigma)\cap(y0z)$ a pour équation $x=0$ et $y^2=-2bz$; C'est l'équation d'une parabole dans le plan $y0z$.
$(\Sigma)\cap(x0y)$ a pour équation $z=0$ et $y^2=\frac{b}{a}x^2,\ a\neq 0 \Leftrightarrow y=\pm\sqrt{\frac{b}{a}}x,\ a\neq 0$; C'est l'équation de deux droites dans le plan $(x0y)$.

Pour un plan $(P(h))$ où h est une hauteur variable sur z , $(\Sigma)\cap(P(h))$ est une parabole d'équations : $z=h$ et $\frac{x^2}{a}-\frac{y^2}{b}-2h=0$ si $h\neq 0$.

Si $h=0$, on retrouve l'équation des deux droites $y=\pm\sqrt{\frac{b}{a}}x$ dans le plan $(x0y)$.