Le symbolisme mathématique

Table des matières

Ce document de mathématiques a été rédigé par Didier VERHILLE.

1. Les symboles utilisés en mathématiques

1.1. Notations textuelles utilisées dans mes notes

Alors	α
Tel que	/ ou , ou tq
Sauf	\ ou /
Ou	$\vee$
Où	Ŏ
D'où	Ď
Et	$\wedge$
Si	φ
Si et seulement si	ssi
C'est à dire	ie
Par exemple (**e**xempli **g**ratia)	eg
Condition nécessaire et suffisante	cns
Ce n'est pas (Négation, non)	$\neg$
Équivaut	eq ou $\Leftrightarrow$
Ensemble positif ou nul	E_+
Ensemble positif ou nul	E_-
Ensemble privé de zéro	E^*

1.2. Un peu de vocabulaire mathématique

A partir des axiomes admissent sans démonstration, on obtient des théorèmes qui viennent petits à petits enrichir la théorie des mathématiques. Ainsi, à partir des axiomes supposés vrais et non démontrés, on définit la notion de vérité en mathématique.

Qu'est-ce qu'un axiome ?

Un axiome est un énoncé supposé comme vrai à priori, convenable, évident en soi et que l'on ne cherche pas à démontrer. Il est utilisé comme fondement d'un raisonnement ou d'une théorie mathématique.

Par exemple, Euclide a énoncé cinq axiomes (les cinq postulats d'Euclide), qu'il a renoncé à démontrer et qui est devenu la base de la géométrie (euclidienne). Le cinquième de ces axiomes a pour énoncé : par un point extérieur à une droite, il passe une et une seule droite parallèle à cette droite.

Un axiome peut par exemple définir une arithmétique simple, qui comprend un ensemble de nombres naturels $\mathbb{N}=\{1,2,3,...\}$, une loi de composition ($+$) interne à cet ensemble, une égalité qui est réflexive $\forall x\in\mathbb{N},\ x\Re x$, symétrique $\forall(x,y)\in\mathbb{N},\ x\Re y\Rightarrow y\Re x$ et transitive $\forall(x,y,z)\in\mathbb{N},\ x\Re y\ et\ y\Re z\Rightarrow x\Re z$, et qui vérifie les propriétés suivantes :

- Il existe un nombre naturel neutre noté 0 ;
- Tout nombre N a un successeur noté $successeur(N)$, en abrégé $succ(N)$;
- $N+0=N$;
- $successeur(N)+M=N+successeur(M)$.

Si 0 est le point de départ (origine), en utilisant les axiomes ci-dessus, on peut définir les successeurs de 0 , c'est à dire $0,\ \mathrm{succ}(0),\ \mathrm{succ}(\mathrm{succ}(0)),\ \ldots,$ en sachant que $\mathrm{succ}(N)=N+1$.
En effet,
$1+2=1+\mathrm{succ}(1)=\mathrm{succ}(1)+1=2+1=2+\mathrm{succ}(0)=\mathrm{succ}(2)+0=0+\mathrm{succ}(2)=0+3=3$ d'où l'on peut en déduire que $1+0=0+1=1$, soit $\mathrm{succ}(0)+0=0+\mathrm{succ}(0)=1$.
On en déduit $\forall N\in\mathbb{N},\ \mathrm{succ}(N)=N+1$

La distinction entre le postulat et l'axiome

Le postulat est ce que le mathématicien demande qu'on lui accorde et qui sert de fondement au reste de son exposé ; il n'est cependant pas par définition interdit de le démontrer plus tard. En ce sens, le postulat se distingue de l'axiome, ce dernier étant toujours posé au départ comme un élément fondamental du système qu'on ne cherchera pas à démontrer.

La plupart des postulats sont jugés comme étant des marques de bon sens, des appuis sur l'expérience.

Qu'est-ce qu'une proposition (ou affirmation ou assertion) ?

Une proposition est un énoncé dont on peut affirmer sans ambiguïté qu'il est vrai ou faux.
Par exemple, 2 est un nombre impair est une proposition fausse. En revanche, tout carré d'un réel est positif est toujours une proposition vraie.

Qu'est-ce qu'une hypothèse

En mathématique, une hypothèse est le point de départ d'une démonstration logique, posé dans l'énoncé et à partir duquel on se propose d'aboutir à la conclusion.
Dans une démonstration, les éléments dont on dispose sont des données (ou des hypothèses) qui sont extraites directement de l'énoncé. Ce sont des informations. Ces informations sont les seules qui peuvent être utilisées sans justification.

Qu'est-ce qu'un théorème ?

Un théorème est une proposition vraie et démontré comme telle.

Qu'est-ce qu'un corollaire ?

Un corollaire à un théorème est un théorème qui est conséquence de ce théorème.

Qu'est-ce qu'un lemme ?

Un lemme est un théorème préparatoire à l'établissement d'un théorème de plus grande importance.

Qu'est-ce qu'une conjecture ?

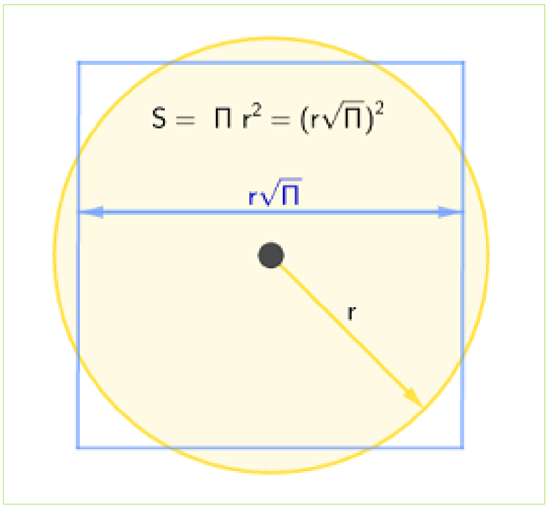
Une conjecture est une proposition que l'on suppose vraie sans parvenir à la démontrer.

Par exemple la conjecture de Fermat : Si n est un entier supérieur ou égal à 3, il n'existe pas d'entiers naturels tous non nuls x , y et z tels que $x^n+y^n=z^n$ (cette conjecture date du XVIIe siècle et il a été démontré récemment que ce résultat était vrai).

Qu'est-ce qu'une quadrature ?

En mathématique, la quadrature signifie le calcul d'une aire. La quadrature d'une surface est la recherche d'un carré ayant même aire que la surface en question.

La plus célèbre des quadrature est la quadrature du cercle : Peut-on tracer à la règle et au compas un carré ayant même aire qu'un cercle donné ? La construction est impossible à la règle et au compas, car π est un nombre transcendant.



Qu'est-ce qu'une définition ?

Une définition est un énoncé dans lequel on décrit les particularités d'un objet. Un cours de mathématiques commence généralement par énoncer un certain nombre de définitions. Ces définitions servent alors à démontrer des premières propriétés (propositions) qui servent ensuite à démontrer des théorèmes.

1.3. Étude propositionnelle

Une proposition est un énoncé pouvant être vrai ou faux. A partir d'une ou plusieurs propositions, nous pouvons en construire d'autres. Ainsi, le calcul propositionnel permet de combiner les propositions entre elles au moyen de connecteurs logiques, ce procédé permet de construire d'autres propositions.

Si P est une proposition, c'est à dire un énoncé sans ambiguïté, on lui associe sa table de vérité qui liste toutes les éventualités.

P
F
V

- Table de vérité des propositions $P \Leftrightarrow Q, P \vee Q, P \wedge Q$

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$	$P \vee Q$	$P \wedge Q$	$\overline{P}$	$\overline{Q}$	$P \Rightarrow Q$
V	V	V	V	V	F	F	V
V	F	F	V	F	F	V	F
F	V	F	V	F	V	F	V
F	F	V	F	F	V	V	V

Théorème de De Morgan

Soient P et Q deux propositions, alors $\overline{P \wedge Q} = \overline{P} \vee \overline{Q}$ et $\overline{P \vee Q} = \overline{P} \wedge \overline{Q}$

Propriétés

Soient P , Q et R trois propositions,

$P \wedge P \Leftrightarrow P$

$P \vee P \Leftrightarrow P$

$P \wedge Q = Q \wedge P$ *et* $P \vee Q = Q \vee P$ (Commutatif)
$(P \wedge Q) \wedge R = P \wedge (Q \wedge R)$ *et* $(P \vee Q) \vee R = P \vee (Q \vee R)$ (Associatif)
$(P \wedge Q) \vee R = (P \vee R) \wedge (Q \vee R)$ *et* $(P \vee Q) \wedge R = (P \wedge R) \vee (Q \wedge R)$ (Distributif)

$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\overline{P} \vee Q)$
$(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R) \Rightarrow (P \Rightarrow R)$
$(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow ((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P))$

$(\overline{P \Rightarrow Q}) \Leftrightarrow (P \wedge \overline{Q})$ (Négation d'une implication)
$(\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}) \Leftrightarrow (P \Rightarrow Q)$ (Contraposée d'une implication)
$Q \Rightarrow P$ est la réciproque de $P \Rightarrow Q$

- CNS, ssi, il faut et il suffit

$\Rightarrow$	$\Leftarrow$
Condition nécessaire Il faut seulement si	Condition suffisante Il suffit si

2. Les quantificateurs

Définition des quantificateurs

Soit E un ensemble et $P(x)$ une proposition dont la valeur de vérité est fonction de la variable x dans E .

- Pour tous les éléments x de E , la proposition $P(x)$ est vraie, cela s'écrit : $\forall x \in E, P(x)$
- Il existe au moins un élément x de E tel que la proposition $P(x)$ est vraie, cela s'écrit : $\exists x \in E, P(x)$ (Ici, la virgule se lit : tel que)
- Il existe un et un seul élément x de E tel que la proposition $P(x)$ est vraie, cela s'écrit : $\exists ! x \in E, P(x)$ (Ici, la virgule se lit : tel que)

$\forall$ est le quantificateur universel. Nous pouvons seulement distribuer $\forall$ sur le connecteur ET .

$\exists$ est le quantificateur existentiel. En montrant qu'il existe un élément x de E vérifiant une certaine propriété, c'est fournir explicitement un tel élément. Nous pouvons seulement distribuer $\exists$ sur le connecteur OU .

Propriétés pour une seule variable

Le contraire de $\forall$ est $\exists$ et le contraire de $\exists$ est $\forall$.

$\overline{\forall x \in E, P(x)} \Leftrightarrow \exists x \in E, \overline{P(x)}$
$\overline{\exists x \in E, P(x)} \Leftrightarrow \forall x \in E, \overline{P(x)}$

Distribution de $\forall$ sur ET et $\exists$ sur OU .

$(\forall x \in E, P(x) \wedge Q(x)) \Leftrightarrow (\forall x \in E, P(x)) \wedge (\forall x \in E, Q(x))$
$(\exists x \in E, P(x) \vee Q(x)) \Leftrightarrow (\exists x \in E, P(x)) \vee (\forall x \in E, Q(x))$

Propriétés pour deux variables

Soit E un ensemble et $P(x,y)$ une proposition dont la valeur de vérité est fonction de la variable x et y dans E .

$$(\forall x\in E, \forall y\in E, P(x,y)) \Leftrightarrow (\forall y\in E, \forall x\in E, P(x,y))$$
$$(\exists x\in E, \exists y\in E, P(x,y)) \Leftrightarrow (\exists y\in E, \exists x\in E, P(x,y))$$

Dans une phrase, nous pouvons permuter des quantificateurs de même nature mais nous ne pouvons pas permuter des quantificateurs de natures différentes.

Quand on inverse l'ordre de deux quantificateurs différents, le sens change.

Quand on écrit la phrase $\exists x\in E / \forall y\in E$ l'élément x est fourni une bonne fois pour toutes avant les y et est donc constant quand y varie.

Quand on écrit la phrase $\forall x\in E, \exists y\in E$ l'élément x est fourni après chaque y . Il dépend de y et peut donc varier quand y varie.

Dans une phrase, le système de parenthèse est souvent sous-entendu lorsque plusieurs quantificateurs se suivent.

$$\forall x\in E,\ \exists y\in E,\ P(x,y) \ = \ \forall x\in E,\ (\exists y\in E,\ P(x,y))$$
$$\textit{ou encore}$$
$$\forall x\in E,\ Q(x) \ \text{où}\ Q(x) \ = \ \exists y\in E,\ P(x,y)$$

Cette phrase affirme que pour chaque personne x de l'ensemble E , il y a une personne y de l'ensemble E , fonction de la personne x , telle que $P(x,y)$.

$$\exists y\in E,\ \forall x\in E,\ P(x,y) \ = \ \exists y\in E,\ (\forall x\in E,\ P(x,y))$$
$$\textit{ou encore}$$
$$\exists y\in E,\ R(y) \ \text{où}\ R(y) \ = \ \forall x\in E,\ P(x,y)$$

Cette phrase affirme qu'il y a une personne y au moins de l'ensemble E , la même pour toutes les personnes x , telle que $P(x,y)$.

« Tout les hommes sont mortels » peut se formaliser $\forall x\in H,\ M(x)$ où H est l'ensemble des hommes et $M(x)$ la proposition « x est mortel ».

3. Les différents raisonnements mathématiques

En mathématiques, pour savoir si un énoncé est vrai ou faux, on utilise certaines règles.

- Un énoncé mathématique est soit vrai, soit faux.
- Des exemples qui vérifient un énoncé ne suffisent pas pour prouver que cet énoncé est vrai.
- Un exemple qui ne vérifie pas un énoncé suffit pour prouver que cet énoncé est faux. Cet exemple est appelé un contre-exemple.
- Une constatation ou des mesures sur un dessin ne suffisent pas pour prouver qu'un énoncé de géométrie est vrai.

En mathématiques, on utilise souvent des énoncés sous la forme ***si…alors…***.

$\textit{SI conditions ALORS conclusion}$

Le raisonnement par déduction

Le raisonnement déductif fonctionne selon le schéma suivant : sachant que P est une proposition vraie, et $P \Rightarrow Q$ est une proposition vraie, on peut affirmer que Q est une proposition vraie.

Le raisonnement par déduction se définit ainsi : à partir de propositions reconnues comme vraies, par enchaînement logique, on déduit une proposition vraie.

Le raisonnement par induction

Le raisonnement par induction et présomption se définit ainsi : de l'étude de plusieurs exemples concordants (et si possible représentatifs), on déduit, par présomption, une proposition générale.

Le raisonnement inductif fonctionne selon un schéma présomptif : constatant que dans les exemples où P est vraie, alors Q est vraie, je présume que $P \Rightarrow Q$ est vraie.

Le raisonnement inductif peut également fonctionner selon un schéma explicatif : sachant que $P \Rightarrow Q$ est vraie, j'explique que Q est vraie en présumant que P est vraie.

Le raisonnement inductif prend toute sa place en mathématiques dans la phase de recherche en particulier sous la forme du schéma explicatif dans le raisonnement. C'est à dire que cela conduit à se poser la question de ce qu'il suffirait d'avoir pour emporter la conclusion.

Le contre-exemple

Dans le sens courant, un contre-exemple est une exception qui confirme la règle. En mathématiques, un seul contre-exemple infirme la règle (ou plutôt l'énoncé).

L'énoncé : $\forall x \in E,\ P(x)\ \textit{est vérifiée}.$

L'existence d'un seul élément x qui ne vérifie pas $P(x)$ montre que l'énoncé est faux.

La propriété $\forall x \in \emptyset,\ P(x)$ est vraie pour n'importe quelle propriété P puisqu'il n'y a aucun élément dans l'ensemble vide, et qu'une propriété est vraie dans un ensemble s'il n'y a pas de contre-exemple.

Un exemple de contre-exemple

C'est ainsi que Fermat conjectura que tous les nombres $F_n = 2^{2^n} + 1,\ \forall n \in \mathbb{N}$ sont premiers, car il avait constaté que les nombres F_0 , F_1 , F_2 , F_3 , F_4 le sont. Mais un jour, Euler prouva que cette conjecture était fausse en donnant un contre exemple : $F_5 = 4\,294\,967\,297$ est divisible par 641 .

La démonstration

Dans une démonstration, il y a au préalable une phase d'investigation pendant laquelle la démarche est essentiellement inductive. Une fois la preuve trouvée, seul le raisonnement déductif est utilisé dans la phase de mise en forme. Une des difficultés majeures est de trouver la preuve.

Dans la recherche de la preuve, la difficulté est double :

- Il faut passer d'un raisonnement inductif à un raisonnement déductif pour établir la preuve ;
- Il faut ensuite mettre en forme ce raisonnement déductif pour en faire une démonstration, c'est à-dire une preuve communicable.

Un exemple de preuve

Deux points A et B étant donnés, déterminer l'ensemble de tous les points C tel que le triangle ABC soit un triangle rectangle en C ?

Première expérimentation : tracé d'un certain nombre de points avec une équerre ou avec un logiciel de géométrie dynamique.

Observation : cela semble être un cercle. Mais quel est son centre ?

Émission d'une conjecture : l'ensemble des points est le cercle de diamètre $[AB]$.

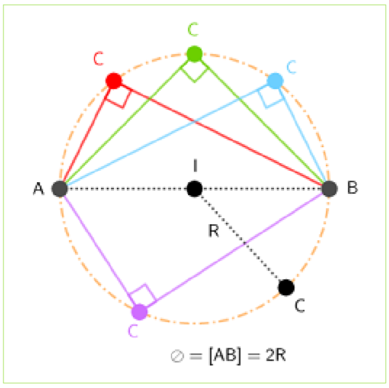
Vérification expérimentale avec une règle graduée, un compas ou bien un logiciel : la distance du milieu de $[AB]$ aux points tracés est-elle égale à la moitié de AB ?

Un triangle tracé en partant d'un point du cercle est-il toujours rectangle ?

Qu'est-ce qui permet de montrer que C est sur le cercle de centre I et de diamètre $[AB]$ privé des deux points A et B ?

- La diagonale d'un rectangle ?
- Des triangles isocèles (grâce aux angles) ?
- Les médiatrices des cotés de l'angle droit ? Et réciproquement ?

Quelle que soit la méthode choisie, la rédaction de la preuve peut être visée, mais seulement dans un second temps.



Le raisonnement par l'absurde

Le principe du raisonnement par l'absurde est le suivant : pour démontrer qu'une proposition P est vraie, on suppose que la proposition $\overline{P}$ est vraie, c'est-à-dire que la proposition P est fausse, et on montre alors que cette hypothèse conduit à une contradiction.

Par exemple, $\forall (p,q) \in \mathbb{N}$, démontrons par l'absurde qu'il n'existe aucun nombre rationnel $\frac{p}{q}$ dont le carré soit égal à 2 , c'est à dire que le nombre $(\frac{p}{q})^2=2$ n'existe pas.

Pour le démontrer, supposons que $\frac{p}{q}=\sqrt{2}$ où p et q sont premiers entre-eux.

En élevant au carré, $(\frac{p}{q})^2=(\sqrt{2})^2 \Leftrightarrow \frac{p^2}{q^2}=2$, soit $p^2=2q^2$ alors p^2 et p sont pairs.
Si p était impair, $\exists k \in \mathbb{N},\ p=2k+1$ alors $p^2=4k^2+4k+1=2m+1,\ m \in \mathbb{N}$ serait également impair. Ce qui est faux.
D'où $p=2k,\ k \in \mathbb{N}$.
Ceci entraîne que $p^2=2q^2=4k^2$, soit $q^2=2k^2$ alors q^2 et q sont aussi pairs.
D'où $q=2k',\ k' \in \mathbb{N}$.

De $\frac{p}{q}=\frac{2k}{2k'}$, on arrive à une contradiction car on a dit que p et q étaient premiers entre-eux. L'hypothèse de départ est donc fausse.

Le raisonnement par contraposition

Pour montrer que $P \Rightarrow Q$ est une proposition vraie, il suffit de montrer que $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$ est une proposition vraie.

Soit $n \in \mathbb{N}$, démontrons que si n^2 est pair alors n est pair.
Supposons n impair alors $\exists k \in \mathbb{N},\ n=2k+1$;
$n^2=(2k+1)^2=4k^2+4k+1=2m+1,\ m \in \mathbb{N}$ est aussi impair.

Nous venons de montrer que si n est impair alors n^2 est impair. Par contraposition ceci est équivalent à dire que si n^2 est pair alors n est pair.

Le raisonnement par récurrence

Pour prouver qu'une propriété $P(n)$ est vraie pour tout entier n , il suffit de montrer que :

$\varphi\ \ P(0)\ \ est\ \ vraie\ \ au\ \ rang\ \ 0\ \ et\ \ \forall n \in N,\ \varphi\ \ P(n)\ \ est\ \ vraie\ \ implique\ \ que\ \ P(n+1)\ \ est\ \ vraie$
α $\forall n \in N,\ P(n)\ \ est\ \ vraie$.

De façon générale, pour tout entier naturel $n \geqslant n_0$
$\varphi\ \ P(n_0)\ \ est\ \ vraie\ \ au\ \ rang\ \ n_0\ \ et\ \ \forall (n \geqslant n_0) \in N,\ \varphi\ \ P(n)\ \ est\ \ vraie\ \ implique\ \ que\ \ P(n+1)\ \ est\ \ vraie$
α $\forall (n \geqslant n_0) \in N,\ P(n)\ \ est\ \ vraie$.

Par exemple, prouvons l'égalité $\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} k=\frac{n(n+1)}{2}$.
L'égalité $P(1)=1$ est vraie.
Supposons que $P(k)=1+2+\ldots+k=\frac{k(k+1)}{2}$ est vraie et, montrons que $P(k+1)=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$ est encore vraie.
$\frac{(k+1)(k+2)}{2}=\frac{k(k+1)}{2}+\frac{2(k+1)}{2}=\frac{k(k+1)}{2}+k+1=P(k)+k+1=1+2+\ldots+k+k+1=P(k+1)$

$P(0)$ est vérifiée, $P(n)$ est héréditaire, donc pour tout n , $P(n)$ est vérifiée.

4. Injection, surjection, bijection

Application injective

Une application f est dite injective ou est une injection si tout élément de son ensemble d'arrivée F a au plus un antécédent par f , ce qui revient à dire que deux éléments distincts de son ensemble de départ ne peuvent pas avoir la même image par f .

Soit f une application d'un ensemble non vide E dans un ensemble non vide F .

$$f : E \to F$$
$$x \to f(x)$$
$$f \ \text{injective} \Leftrightarrow \forall (x_1, x_2) \in E^2,\ x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$
$$f \ \text{injective} \Leftrightarrow \forall (x_1, x_2) \in E^2,\ f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

Application surjective

Une application f est dite surjective ou est une surjection si tout élément de l'ensemble d'arrivée F a au moins un antécédent par f , c'est-à-dire est image d'au moins un élément de l'ensemble de départ.

Soit f une application d'un ensemble non vide E dans un ensemble non vide F .

$$f : E \to F$$
$$x \to f(x)$$
$$f \ \text{surjective} \Leftrightarrow \forall y \in F,\ \exists x \in E \ / \ y = f(x)$$

Application bijective

Soit f une application d'un ensemble non vide E dans un ensemble non vide F .
f est bijective si et seulement si tout élément de l'ensemble d'arrivée F a un et un seul antécédent dans E par f .

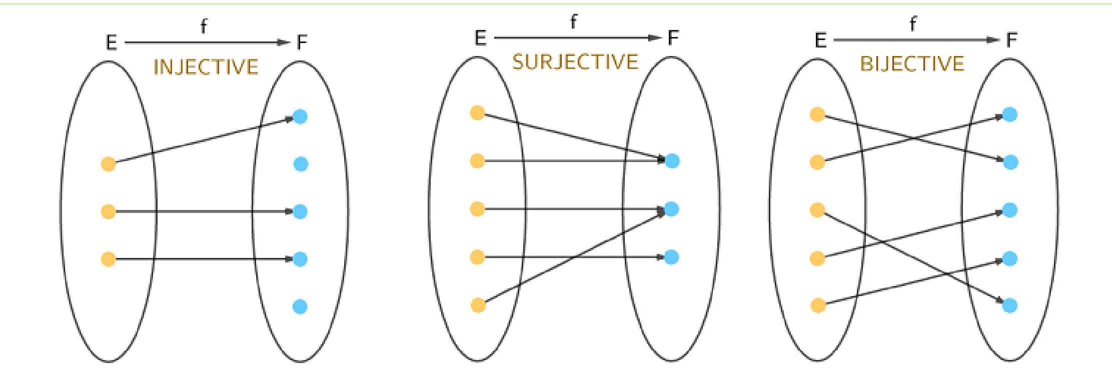
f est bijective si et seulement si f est injective et surjective.

$$f : E \to F$$
$$x \to f(x)$$
$$f \ \text{bijective} \Leftrightarrow \forall y \in F,\ \exists ! x \in E \ / \ y = f(x)$$

En résumé,

Soit $f : E \to F$, $x \to f(x)$

$$f \ \text{injective} \Leftrightarrow \forall (x_1, x_2) \in E^2,\ x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$
$$f \ \text{surjective} \Leftrightarrow \forall y \in F,\ \exists x \in E \ / \ y = f(x)$$
$$f \ \text{bijective} \Leftrightarrow \forall y \in F,\ \exists ! x \in E \ / \ y = f(x)$$



5. Table des symboles mathématiques

La constante pi	π	$3.14159...$
La constante i^i	i^i	$e^{-\frac{\pi}{2}}=0.207879$
Le nombre de Néper	e	$2.71828...$
Racine carrée de 2	$\sqrt{2}$	1.414213
Le nombre d'or	φ	$(\frac{\sqrt{5}+1}{2})=1.618...$
La constante d'Euler	γ	$0.57721...$ $\gamma=\lim_{n\to\infty}(H_n-\ln(n))$ *Avec la série harmonique* $H_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...$
$a,b,c,...$	Coefficients connus dans une équation (Quantités connues)	$ax^2+bx+c=0$ $(a,b,c)\in R^3$
$x,y,z,...$	Inconnues ou variables	$ax^2+bx+c=0$ $x=?$
$\lvert a\rvert$	La valeur absolue du nombre a	$\lvert 11\rvert=11$ $\lvert -11\rvert=11$
$[a]$ $\lfloor a\rfloor$ $\lceil a\rceil$	Partie entière de a Arrondi entier inférieur de a Arrondi entier supérieur de a	$[3.14]=3$ $\lfloor 3.14\rfloor=3$ $\lceil 3.14\rceil=4$
$\{a\}$	Partie fractionnaire de a	$\{3.14\}=0.14$ $\{-3.75\}=0.25$
$\overline{abcd}$	C'est un nombre	$\overline{abcd}=6377$
$a=b$	a est égal à b	Symbole d'égalité
$a:=a+1$	a prend pour valeur a+1	Symbole d'affectation
$a\sim b$	a équivalent à b	
$a\equiv r[n]$	a congru à r modulo n	a-r est un multiple de n (a-r=kn) r est le reste de la division euclidienne de a par n
$a\approx b$	a presque égal à b	Approximation
$a\neq b$	a différent de b	
$a>b$	a supérieur à b	
$a\geq b$	a supérieur ou égal à b	
$a<b$	a inférieur à b	
$a\leq b$	a inférieur ou égale à b	
$a+b$	a plus b	Addition de deux nombres
$a-b$	a moins b	Soustraction de deux nombres
$a\pm b$	a plus ou moins b	

ab (Recommandé) $a.b$	a multiplié par b	La multiplication est prioritaire
$n!$	Fonction factorielle	$5!=1.2.3.4.5=120$
$!n=n!\sum_{k=0}^{n}(\frac{(-1)^k}{k!})$	Sous factorielle	C'est une factorielle divisée : $!5=44$
$\sum_{k=1}^{n}x_k=x_1+x_2+...+x_n$	Somme des x_k pour k variant de 1 à n	
$\prod_{k=1}^{n}x_k=x_1.x_2....x_n$	Produit des x_k pour k variant de 1 à n	
$1/a=a^{-1}$	Inverse de a^{-1}	
a/b $a\div b$ $a:b$	a divisé par b	
$a\mid b$	a divise b b est divisible par a	
$\neg a$	Symbole de négation	non a
$a\nmid b$	a ne divise pas b	
$pgcd(a,b)$	$k = pgcd(a,b) \Leftrightarrow k/a$ et k/b Le plus grand commun diviseur de a et b	a = 18 = 1.2.3.3 b = 21 = 1.3.7 $pgcd(18,21)=1.3=3$
$ppcm(a,b)$	ppcm(a,b) Le plus petit commun multiple de a et b	a = 8 = 20 = 1.2.2.2 b = 20 = 1.2.2.5 $ppcm(8,20)=1.2.2.2.5=40$
$pgcd(a,b)=1$	a et b sont premiers entre eux	
$a^n = a.a...a$ (n fois)	a puissance n	
$\sqrt{a}=a^{\frac{1}{2}}$	Racine carrée de a	
$\sqrt[n]{a}=a^{\frac{1}{n}}$	Racine n-ième de a	
$\sqrt[n]{a^p}=a^{\frac{p}{n}}$	Racine n-ième de a puissance p	
$i=\sqrt{-1}$	i est l'imaginaire	$i^2=-1$
$z = a + ib$	C'est un nombre complexe	$(a,b)\in R^2$
j	Racine cubique de 1	$1+j+j^2=0$
∞	Infini	
A, $a_{i,j}$	Matrice et ses éléments	$A=(a_{i,j})$ Matrice n lignes et p colonnes $0\leq i\leq n$ et $0\leq j\leq p$
δ_{ij}	Symbole de Kronecker	$\delta_{ij}=1$ si $i=j$ $\delta_{ij}=0$ si $i\neq j$
$a,b,c,...$	Les éléments d'un ensemble	
$E,F,...$	Des ensembles	
$E=\{a,b,c,...\}$	Un ensemble E et ses éléments	

$E=\{x \mid P(x)\}$	x appartient à l'ensemble E qui a la propriété P	
$\bar{x}$	Classe d'équivalence $y\in\bar{x} \Leftrightarrow x\Re y$ $\Re(x) = \{y\in E \mid x\Re y\}$	Tous les éléments de E qui ont la même propriété que x
$f:E\to E$ $x\to y=f(x)$	f fonction de E vers E	
$(x,y)\in E.F$	$x\in E$ et $y\in F$	(x,y) couple d'éléments $E.F$: Produit cartésien
$E.F$	Produit cartésien	E={1,2} et F={a,b} E.F={(1,a),(1,b),(2,a),(2,b)}
$R.R = R^2$	Ensemble des couples de réels (x,y)	$(x,y)\in\mathbb{R}^2$
$\emptyset$	Ensemble vide ou diamètre d'un cercle	Espace vide
$Card\,E$	Cardinal de l'ensemble E	Quantité d'élément ou taille de l'ensemble E={3,6,7,8,9}, Card E = 5
$C_n^k=\binom{n}{k}$	Coefficient du binôme $C_n^k=\frac{n(n-1)...,k\,facteurs}{k(k-1)...,k\,facteurs}$	Nombre de combinaison E={1,2,3,4,5}, $C_5^2=\frac{5.4}{2.1}=10$
Γ_n^k	Coefficient de multiensemble	k combinaisons avec répétition d'un ensemble à n éléments
$\wp(E)$	Partie de E. $(E,\emptyset)\in\wp(E)$	$Card\,\wp(E)=2^{Card(E)}$
$a\in E$	L'élément a appartient à l'ensemble E	
$a\notin E$	L'élément a n'appartient pas à l'ensemble E	
$E\sim F$	Les ensembles E et F sont équipotents ou en bijection	Tous les éléments de l'un correspond à un seul des éléments de l'autre
$E\cup F$	$E\cup F=\{x \mid x\in E \;\; ou \;\; x\in F\}$	
$E\cap F$	$E\cap F=\{x \mid x\in E \;\; et \;\; x\in F\}$	
$E\subset F$	Tous les éléments de E sont dans F	
C_E	$C_E=\{x \mid x\notin E\}$	
$E\setminus F$	E sans F	Tous les éléments de E sauf tous ceux de F
E^*	Tous les éléments de E sauf zéro	
Z_+	L'ensemble des entiers relatifs positifs	
N_n	$N_n=\{1,2,3,\ldots,n\}$	
Z_4	Groupe des entiers modulo 4	3+2=1 ; 3+1=0 ; 3+3=2 ;
$Z/5Z$	L'ensemble quotient de Z par la relation , muni de + et x	Les éléments sont {0,1,2,3,4} modulo 5

$\aleph 0, \ \aleph 1$	Aleph 0 et aleph 1	Aleph 0 est l'infini des nb entiers Aleph 1 est l'infini du nb de points sur une courbe
$a \circ b$	a est composé avec b	Composition de fonctions
$a \ \Re \ b$	a est en relation avec b	
ev	Espace vectoriel	
evn	Espace vectoriel normé	
ea	Espace affine	
V, F	Vrai, Faux	
$\neg P \ ou \ \overline{P}$	Non P, négation	Si P est vraie alors non P est faux et réciproquement
$\forall x$	Quel que soit l'élément x	Pour tout x
$\exists x$	Il existe au moins un élément x	
$\exists ! x$	Il existe un élément x unique	
P	Proposition logique	
$\Rightarrow$	Implication	
$\Leftrightarrow$	Implication direct et réciproque Équivalence	
$a \vee b$	a ou b	
$a \wedge b$	a et b	
$::$	Conclusion, donc	
$\oplus$	Le plus cerclé	Somme directe, différence symétrique
$\otimes$	Le multiplié cerclé	Produit tensoriel
$A, B, C, \ldots$	points	
$\{A, B, C, \ldots\}$	Liste de points	
$\hat{A}$	Angle	
$°, rad$	Degré, radian	
$[A, B]$	Segment AB	
$D \| D'$	Droite D parallèle à la droite D'	
$D \perp D'$	Droite D perpendiculaire à la droite D'	
$\overrightarrow{AB}$	Vecteur AB	
$\overline{AB}$	Mesure algébrique de AB	
$\|\overrightarrow{AB}\|$	Norme du vecteur AB	
(AB)	Droite passant par AB	
$y = f(x)$	Fonction f	y est l'image de x par f x est l'antécédent de y par f

$f : E \to F$ $x \to y$	Fonction de E dans F qui associe x à f(x)	
$\mathbb{R} \setminus \{a\}$	L'ensemble R privé de a	
f^{-1}	Fonction symétrique	Fonction réciproque
Id_E	Fonction identique de E dans E	
D_f	Domaine de définition d'une application	
Δx dx ∂x	Petite différence de x Petite variation de x Petite contribution de x	
$\nabla, \Delta, grad, \mathrm{div}, rot$	Nabla, laplacien, gradient, divergence, rotationnel	
$\int_a^b x dx$	Intégrale simple sur la plage de a à b	
$\oiiint_V E dV$	Intégrale triple sur le volume fermé V	
$li(x) = \int_2^x (\frac{dt}{\log(t)})$	Fonction logarithmique intégrale pour x>=2	