Courbes paramétrées dans l'espace

Table des matières

Ce document de mathématiques a été rédigé par Didier VERHILLE.

Ce document de mathématiques généralise le chapitre sur les courbes paramétrées dans le plan.

1.Définition

Soit I une partie de $\mathbb{R}$. Une application $\begin{array}{l} M: I \to \mathbb{R}^3 \\ t \to M(t) \end{array}$ définie et de classe C^1 sur I s'appelle une courbe paramétrée dans l'espace. On la note généralement Γ . L'ensemble des points $M(t)$ s'appelle l'ensemble des points de la courbe.

Si $I=[a,b]$ est un intervalle fermé borné, on dit que la courbe paramétrée dans l'espace est un arc, d'origine $M(a)$ et d'extrémité $M(b)$. Si $M(a)=M(b)$, on dit que l'arc est fermé.

La variable t s'appelle le paramètre. Elle est parfois appelée le temps.

Soit une base $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de l'espace, alors le point $M(t)$ a des coordonnées dans la base qui sont des fonctions réelles de t ; soient $f(t)$, $g(t)$ et $h(t)$ les coordonnées dans la base $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ du point $M(t)=(f(t),g(t),h(t))$. On dit que la courbe paramétrée est définie par les équations $x=f(t)$, $y=g(t)$ et $z=h(t)$ où $\begin{array}{l} f: I \to \mathbb{R} \\ t \to f(t) \end{array}$, $\begin{array}{l} g: I \to \mathbb{R} \\ t \to g(t) \end{array}$ et $\begin{array}{l} h: I \to \mathbb{R} \\ t \to h(t) \end{array}$. On dit aussi que l'ensemble des points de la courbe admet pour représentation paramétrique $(x=f(t), y=g(t), z=h(t))$.

Pour que la courbe $M(t)$ soit continue, respectivement dérivable, il faut et il suffit que les fonctions $f(t)$, $g(t)$ et $h(t)$ soient continues, respectivement dérivables.

Le mot courbe désigne indifféremment à la fois l'application et son graphe.

Exemple

Les équations $f(t)=x_0+at$, $g(t)=y_0+bt$ et $h(t)=z_0+ct$ où t désigne le paramètre et avec $(a,b,c)\neq(0,0,0)$, sont une représentation paramétrique de la droite passant par le point de coordonnées (x_0, y_0, z_0) et parallèle au vecteur de coordonnées (a,b,c) .

Par exemple, dans la base $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, si $f(t)=1+t$, $g(t)=1+t$ et $h(t)=1+t$, la droite passe par le point de coordonnées $(1,1,1)$ et est parallèle au vecteur de coordonnées $(1,1,1)$.

Si la base $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est orthogonale, les équations $f(t)=a\cos t$, $g(t)=a\sin t$ et $h(t)=bt$ sont, si $a\neq 0$ et $b\neq 0$, une représentation paramétrique d'une hélice circulaire.

2.Tangente

Soit $\Gamma : t \rightarrow M(t)$ une courbe paramétrée dans l'espace. On dit que la courbe Γ admet une tangente pour $t=t_0$ ou une tangente en $M(t_0)$ si $M(t)\neq M(t_0)$ pour $t\neq t_0$ et $|t-t_0|$ suffisamment petit.

La droite $M(t_0)M(t)$ qui est définie pour $t\neq t_0$ et $|t-t_0|$ suffisamment petit tend vers une limite quand $t\rightarrow t_0$ par valeurs différentes de t_0 . Cette limite s'appelle la tangente à Γ pour $t\neq t_0$.

Si Γ est dérivable pour $t\neq t_0$ et si $M'(t_0)\neq 0$, Γ admet une tangente pour $t=t_0$ parallèle au vecteur $\vec{M}'(t_0)$.

Le vecteur vitesse moyenne entre les temps distincts t_1 et t_2 est le vecteur $\frac{\overrightarrow{M(t_1)M(t_2)}}{t_2-t_1}=\frac{M(t_2)-M(t_1)}{t_2-t_1}$ et le vecteur vitesse instantanée en t_0 est la limite, si elle existe, de $\lim_{t\rightarrow t_0}(\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0})=f'(t)$.

Si f est deux fois dérivables en $t=t_0$, le vecteur accélération en ce point est $f^{(2)}(t_0)$.

Lorsqu'il y a une tangente pour $t=t_0$, tout plan contenant la tangente s'appelle le plan tangent en $M(t_0)$.

Le plan mené par $M(t_0)$ perpendiculaire à la tangente s'appelle le plan normal en $M(t_0)$. Toute droite perpendiculaire à la tangente s'appelle la droite normale en $M(t_0)$.

Si $M'(t_0)=0$, on dit que $M(t)$ est stationnaire pour $t=t_0$.

Si $M(t)$ est p fois continûment dérivable dans un intervalle ouvert I sur $\mathbb{R}$ contenant t_0 et que $M'(t_0)=M^{(2)}(t_0)=...=M^{(p-1)}(t_0)=0$ et $M^{(p)}(t_0)\neq 0$ alors la courbe admet une tangente pour $t=t_0$ parallèle au vecteur $\vec{M}^{(p)}(t_0)$.

3.Plan osculateur

Supposons que la courbe admet une tangente Δ en $t=t_0$; Cette droite tangente est contenue dans une infinité de plans ayant pour axe de rotation la tangente. Parmi ces plans, il en est un qui joue un rôle particulier, c'est le plan osculateur.

On dit que la courbe admet un plan osculateur en $M(t_0)$ si :

- $M(t_0+h)\notin\Delta$ pour $|h|=|t-t_0|$ suffisamment petit et $h\neq 0$.
- Le plan $\Delta M(t_0+h)$ a une position limite quand $h\rightarrow 0$ pour $h\neq 0$ et $|h|=|t-t_0|$ suffisamment petit.

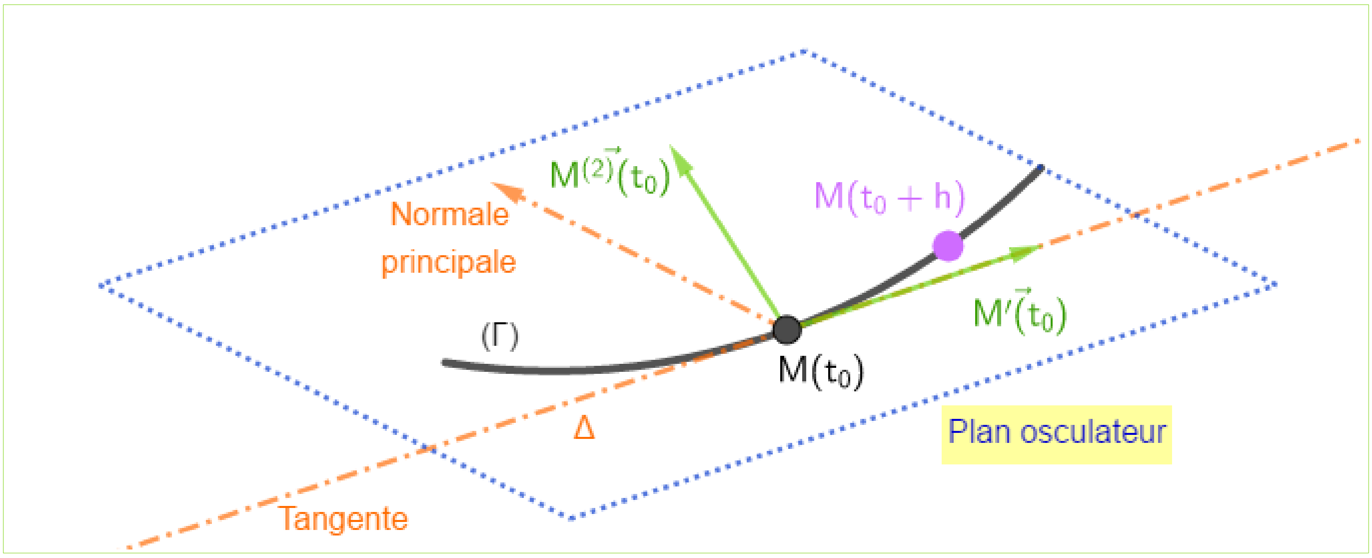
Cette limite s'appelle le plan osculateur à la courbe en $M(t_0)$. Si le plan osculateur existe, il contient Δ ; c'est aussi un plan tangent à la courbe.

La normale située dans le plan osculateur s'appelle la normale principale.

Théorème

Supposons Γ deux fois continûment dérivable dans un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ contenant t_0 . Supposons qu'il existe deux vecteurs dérivés en $M(t_0)$, $\vec{M}'(t_0)\neq\vec{0}$ et $\vec{M}^{(2)}(t_0)\neq 0$, linéairement indépendants, alors $M(t_0)$ possède un plan osculateur en $t=t_0$ de vecteurs directeurs $\vec{M}'(t_0)\neq\vec{0}$ et $\vec{M}^{(2)}(t_0)\neq 0$.

En effet, pour h assez petit, on a $\overrightarrow{M(t_0)M(t_0+h)}=h\vec{M}'(t_0)+\frac{h^2}{2!}(\vec{M}^{(2)}(t_0)+\vec{o}(1))$; les vecteurs $\vec{M}'(t_0)$ et $\vec{M}^{(2)}(t_0)+o(1)$ sont linéairement indépendants. Donc, le vecteur $\overrightarrow{M(t_0)M(t_0+h)}$ n'est pas parallèle au vecteur $\vec{M}'(t_0)$ si $h\neq 0$. Comme $\vec{M}'(t_0) \parallel \Delta$, on voit que $M(t_0+h)\notin\Delta$ et que le plan $\Delta M(t_0+h)$ a une position limite, parallèle aux vecteurs $\vec{M}'(t_0)\neq\vec{0}$ et $\vec{M}^{(2)}(t_0)\neq 0$ quand $h\to 0$.

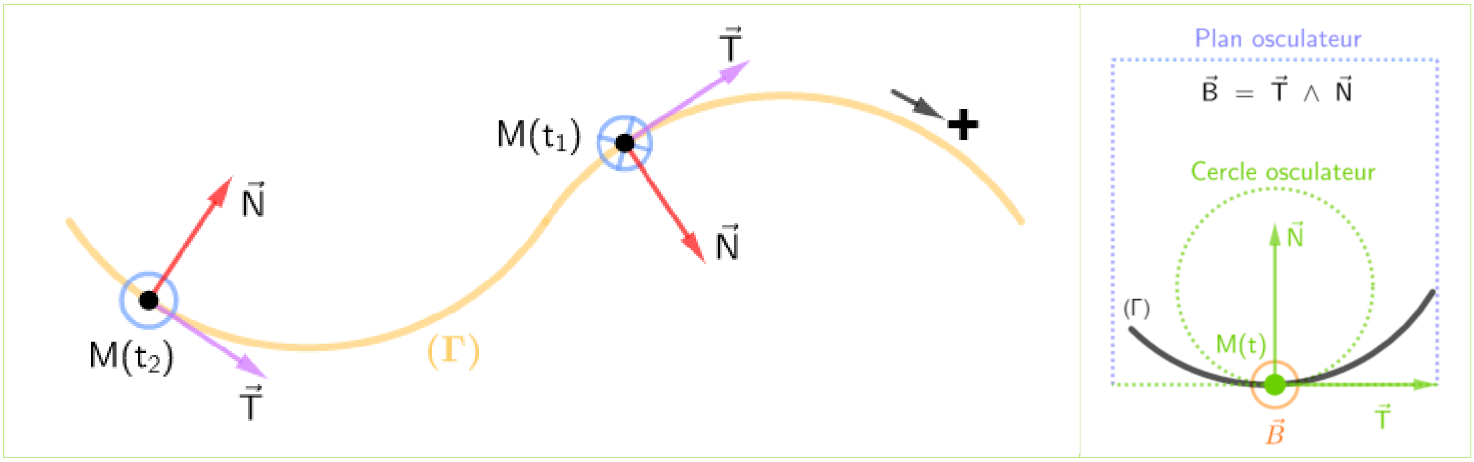


Quelques mots sur le repère de Frenet

Le repère de Frenet attaché au point en mouvement $M(t)$ d'une courbe est un outil d'étude du comportement local des courbes. Pour les courbes gauches, il est défini par trois vecteurs unitaires $\vec{T}$, $\vec{N}$, $\vec{B}$. En prenant comme origine le point $M(t)$, ces trois vecteurs forment une base orthonormale directe $B=\{M(t),\vec{T},\vec{N},\vec{B}\}$. Le repère de Frenet est un repère qui se déplace avec le point $M(t)$ le long de la courbe. C'est un repère orienté.

Le vecteur $\vec{T}$ en $M(t)$ dirige la tangente à la courbe. Il est orienté dans le sens positif. Le vecteur $\vec{N}$ en $M(t)$ est le vecteur normal à la trajectoire et à la tangente. Il est orienté vers l'intérieur de la courbe. Le vecteur $\vec{B}$ en $M(t)$ est le vecteur binormal. Le couple $(\vec{T},\vec{N})$ engendre un plan appelé plan osculateur tangent à la courbe en $M(t)$. Ce plan contient la tangente $\vec{T}$ et le cercle osculateur à la courbe.

Les vecteurs $\vec{T}$, $\vec{N}$, $\vec{B}$ en $M(t)$ forment un trièdre direct matérialisé par la règle de la main droite. $\vec{B}$ est représenté par le pouce. $\vec{T}$ est représenté par l'index et $\vec{N}$ par le majeur.



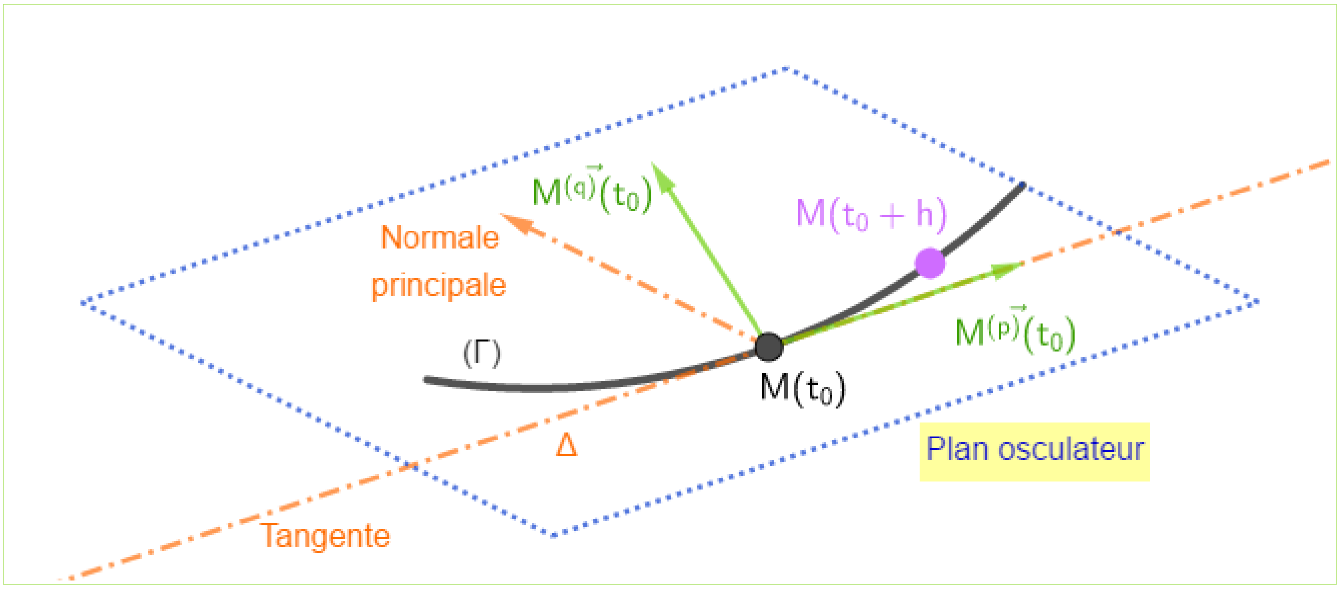
Généralisation du théorème

Supposons que les vecteurs $\vec{M}'(t_0)$ et $\vec{M^{(2)}}(t_0)$ sont nuls et faisons les hypothèses suivantes :

- La courbe Γ est indéfiniment dérivable dans un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ contenant t_0 .
- Supposons que les vecteurs $\vec{M}'(t_0)=\vec{M^{(2)}}(t_0)=...=\vec{M^{(p-1)}}(t_0)=\vec{0}$, mais que le vecteur $\vec{M^{(p)}}(t_0)\neq\vec{0}$.
- Supposons que les vecteurs $\vec{M^{(p)}}(t_0),\ \vec{M^{(p+1)}}(t_0),...,\ \vec{M^{(q-1)}}(t_0)$ sont parallèles entre eux mais que le vecteur $\vec{M^{(q)}}(t_0)$ est linéaire indépendant du vecteur $\vec{M^{(p)}}(t_0)$.

Alors, on a $M(t_0)\vec{M}(t_0+h)=\frac{h^p}{p!}\vec{M^{(p)}}(t_0)+\frac{h^{p+1}}{p+1!}\vec{M^{(p+1)}}(t_0)+...+\frac{h^{q-1}}{q-1!}\vec{M^{(q-1)}}(t_0)+\frac{h^q}{q!}(\vec{M^{(q)}}(t_0)+\vec{o}(1))$.

Comme les vecteurs $\vec{M^{(p)}}(t_0),\ \vec{M^{(p+1)}}(t_0),...,\ \vec{M^{(q-1)}}(t_0)$ sont parallèles entre eux et que les deux premiers vecteurs non nuls linéairement indépendants sont $\vec{M^{(p)}}(t_0)$ et $\vec{M^{(q)}}(t_0)$ alors il existe un plan osculateur en $t=t_0$ contenant $M(t_0)$ et les vecteurs $\vec{M^{(p)}}(t_0)$ et $\vec{M^{(q)}}(t_0)$.



Rappel sur les vecteurs libres

Trois vecteurs linéairement indépendants engendrent tout l'espace $\mathbb{R}^3$.

Dans l'espace $\mathbb{R}^3$, les trois vecteurs $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ sont linéairement indépendants ou libres si aucun d'eux n'est combinaison linéaire des autres, c'est-à-dire : $a\vec{u}_1 + b\vec{u}_2 + c\vec{u}_3 = \vec{0} \Rightarrow a = b = c = 0$

Les vecteurs $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ sont linéairement indépendants ssi $det(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3) \neq 0$.

Exemple

Soit la courbe paramétrée $M(t)$ définit et continûment dérivable dans un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ de coordonnées $M(t) = (t, t^2, t^3)$.
La dérivée première en t est $\vec{M}'(t) = (1, 2t, 3t^2)$, la dérivée seconde en t est $\vec{M}^{(2)}(t) = (0, 2, 6t)$ et la dérivée troisième est $\vec{M}^{(3)}(t) = (0,0,6)$.

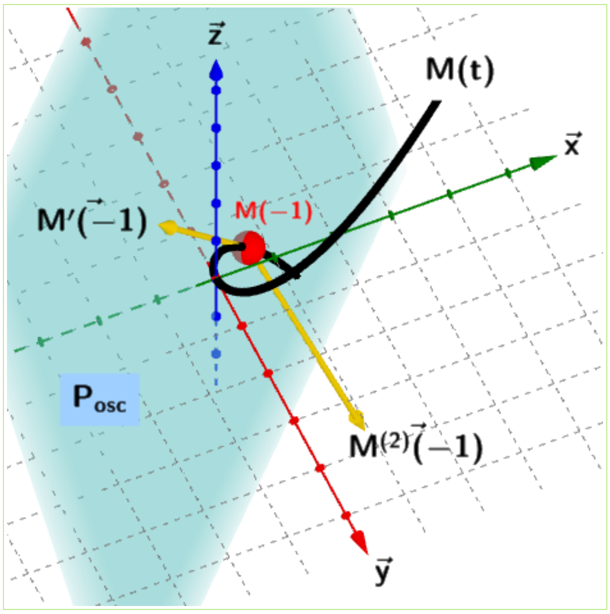
$$det(M'(t), M^{(2)}(t), M^{(3)}(t)) = \begin{vmatrix} 1 & 2t & 3t^2 \\ 0 & 2 & 6t \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 1x(2x6-0) = 12 \neq 0$$

Comme le déterminant est nul, les trois vecteurs $\vec{M}'(t)$, $\vec{M}^{(2)}(t)$ et $\vec{M}^{(3)}(t)$ sont linéairement indépendants l'un par rapport à l'autre pour tout t de l'intervalle I sur $\mathbb{R}$. Ainsi, il existe un plan osculateur P_{osc} en $M(t)$ contenant les vecteurs libres $\vec{M}'(t)$ et $\vec{M}^{(2)}(t)$.

Pour qu'un point de coordonnées $A(x, y, z) \in P_{osc}$, il faut et il suffit que les vecteurs $\overrightarrow{M(t)A},\ \vec{M}'(t),\ \vec{M}^{(2)}(t)$ soient liés. C'est-à-dire que

$$det(\overrightarrow{M(t)A},\ \vec{M}'(t),\ \vec{M}^{(2)}(t)) = \begin{vmatrix} x-t & y-t^2 & z-t^3 \\ 1 & 2t & 3t^2 \\ 0 & 2 & 6t \end{vmatrix} = 0$$

En développant le déterminant, on a $(x-t)(12t^2-6t^2)-[(y-t^2)6t-2(z-t^3)]=0$
Soit $3t^2x - 3ty + z - t^3 = 0$; C'est l'équation du plan osculateur P_{osc} en $M(t)$.



4.Forme de la courbe au voisinage d'un point

Supposons Γ trois fois continûment dérivable dans un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ contenant t_0 . Supposons qu'il existe trois vecteurs dérivés en $M(t_0)$ linéairement indépendants qui sont $\vec{M}'(t_0)\neq\vec{0}$, $\vec{M}^{(2)}(t_0)\neq 0$ et $\vec{M}^{(3)}(t_0)\neq 0$.

Pour h assez petit, on a $M(t_0)\vec{M}(t_0+h)=h\vec{M}'(t_0)+\frac{h^2}{2!}\vec{M}^{(2)}(t_0)+\frac{h^3}{3!}(\vec{M}^{(3)}(t_0)+\vec{o}(1))$;

Si l'on prend comme nouvelle base, la base $B = (M(t_0),\vec{M}'(t_0),\vec{M}^{(2)}(t_0),\vec{M}^{(3)}(t_0))$ où $M(t_0)$ est l'origine de la nouvelle base, alors les coordonnées du point $M(t_0+h)$ dans la nouvelle base sont :

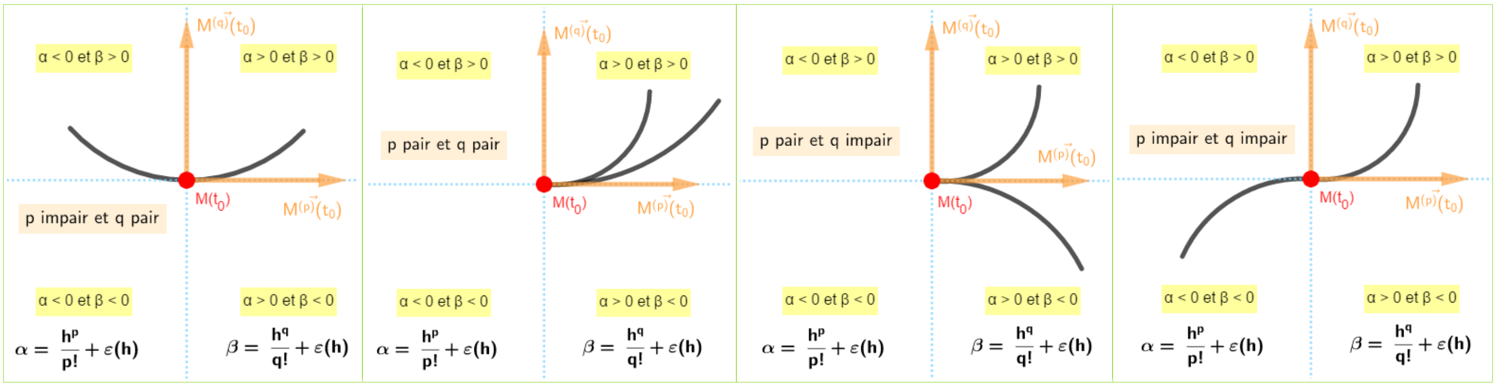
$f(t_0+h)=h(1+o(1))$, $g(t_0+h)=\frac{h^2}{2!}(1+o(1))$, $h(t_0+h)=\frac{h^3}{3!}(1+o(1))$

L'axe des $f(t_0+h)$ est la tangente en $M(t_0)$ quand $h\to 0$.

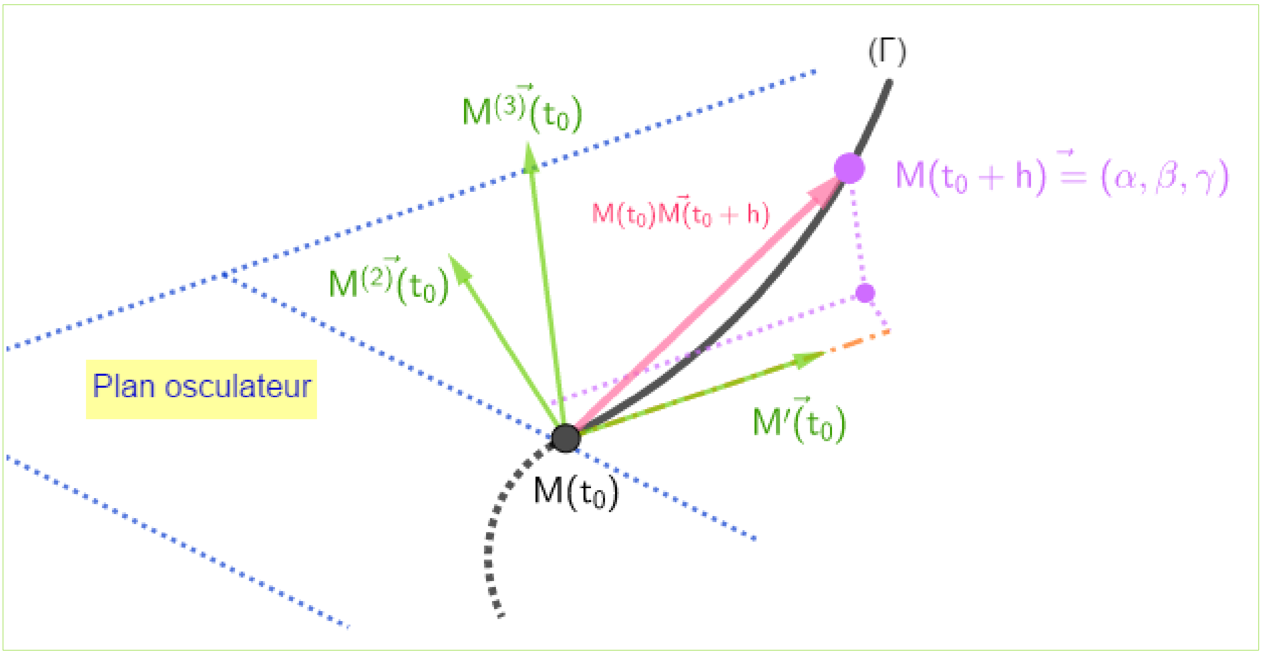
Le plan $f(t_0+h)g(t_0+h)$ est le plan osculateur en $M(t_0)$ quand $h\to 0$.

$h(t_0+h)$ a le signe de h pour $|h|$ assez petit et $h\neq 0$. Par ailleurs, le fait que $h(t_0+h)$ est un infiniment petit du troisième ordre quand $h\to 0$ indique que la courbe est très proche de plan osculateur au voisinage de $M(t_0)$. Le signe de $h(t_0+h)$ indique la position de la courbe en $M(t_0)$ par rapport au plan osculateur.

Ces trois coordonnées permettent de définir la forme de la courbe au voisinage du point $M(t_0)$ (Point ordinaire, point d'inflexion, point de reboussement de première espèce ou point de rebroussement de seconde espèce).



Quand $h \to 0$, le plan osculateur est le seul plan tangent en $M(t_0)$ contenant $\vec{M}'(t_0) \neq \vec{0}$ et $\overrightarrow{M^{(2)}}(t_0) \neq 0$.



Pour définir la forme de la courbe au voisinage d'un point $M(t_0)$, il faut représenter la projection de la courbe $M(t)$ sur les trois plans de la nouvelle base $B = (M(t_0), \vec{M}'(t_0), \overrightarrow{M^{(2)}}(t_0), \overrightarrow{M^{(3)}}(t_0))$.