Courbes paramétrées dans le plan

Table des matières

Ce document de mathématiques a été rédigé par Didier VERHILLE.

En mécanique, on est amené à considérer un point qui évolue au cours du temps. Par exemple, une voiture peut être considérée comme un point mobile. La planète Mars, vue du Soleil peut être considérée comme un point mobile car son rayon est petit par rapport à sa distance au Soleil. La trajectoire d'un point dans le temps correspond à l'ensemble des positions occupées par ce point au cours de son mouvement. Cet ensemble de positions décrivent une courbe. Lorsque la trajectoire correspond à une courbe qui n'est ni une droite ni un cercle, on parle de trajectoire curviligne. Dans ce cas, le mobile se déplace sur une courbe quelconque, plane ou non. Le mouvement est appelé curviligne. On étudie ici cette situation d'une manière abstraite.

1. Définition

Soit I une partie de $\mathbb{R}$. Une application $\begin{matrix} M : I \to \mathbb{R}^2 \\ t \to M(t) \end{matrix}$ définie et de classe C^1 sur I s'appelle une courbe paramétrée plane. On l'a note généralement Γ . L'ensemble des points $M(t)$ s'appelle l'ensemble des points de la courbe.

Si $I=[a,b]$ est un intervalle fermé borné, on dit que la courbe paramétrée est un arc, d'origine $M(a)$ et d'extrémité $M(b)$. Si $M(a)=M(b)$, on dit que l'arc est fermé.

La variable t s'appelle le paramètre. Elle est parfois appelée le temps.

Soit une base $(\vec{i},\vec{j})$ du plan, alors le point $M(t)$ a des coordonnées dans la base qui sont des fonctions réelles de t ; soient $f(t)$ et $g(t)$ les coordonnées dans la base $(\vec{i},\vec{j})$ du point $M(t)=(f(t),g(t))$. On dit que la courbe paramétrée est définie par les équations $x=f(t)$ et $y=g(t)$ où $\begin{matrix} f:I\rightarrow\mathbb{R} \\ t\rightarrow f(t)\end{matrix}$ et $\begin{matrix} g:I\rightarrow\mathbb{R} \\ t\rightarrow g(t)\end{matrix}$. On dit aussi que l'ensemble des points de la courbe admet pour représentation paramétrique $\begin{matrix} x=f(t) \\ y=g(t)\end{matrix}$

Pour que la courbe $M(t)$ soit continue, respectivement dérivable, il faut et il suffit que les fonctions f et g soient continues, respectivement dérivables.

On identifie l'ensemble $\mathbb{C}$ avec l'ensemble $\mathbb{R}^2$; l'application $\begin{matrix} M:I\rightarrow\mathbb{C} \\ t\rightarrow M(t)=(f(t),g(t))\end{matrix}$ définie et de classe C^1 sur I s'appelle une courbe complexe plane. On appelle affixe du point $M(t)=(f(t),g(t))$, le nombre complexe $z(t)=f(t)+ig(t)$ où $f(t)\in\mathbb{R}\ et\ g(t)\in\mathbb{R}$. Le point $M(t)=(f(t),g(t))$ est alors appelé l'image du nombre complexe $z(t)=f(t)+ig(t)$.

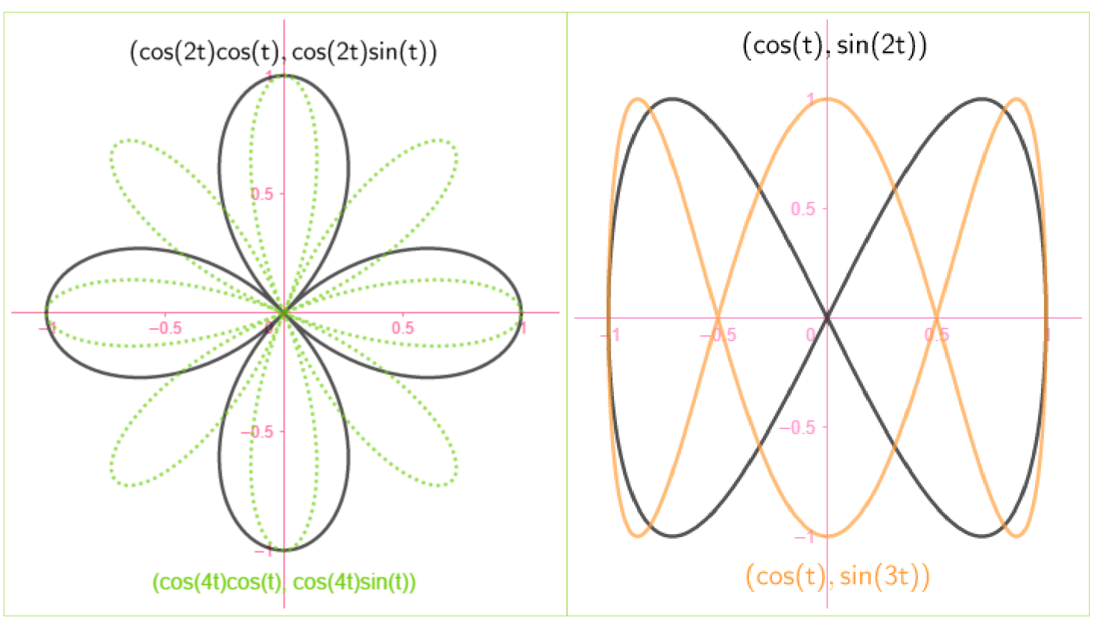
Le mot courbe désigne indifféremment à la fois l'application et son graphe.

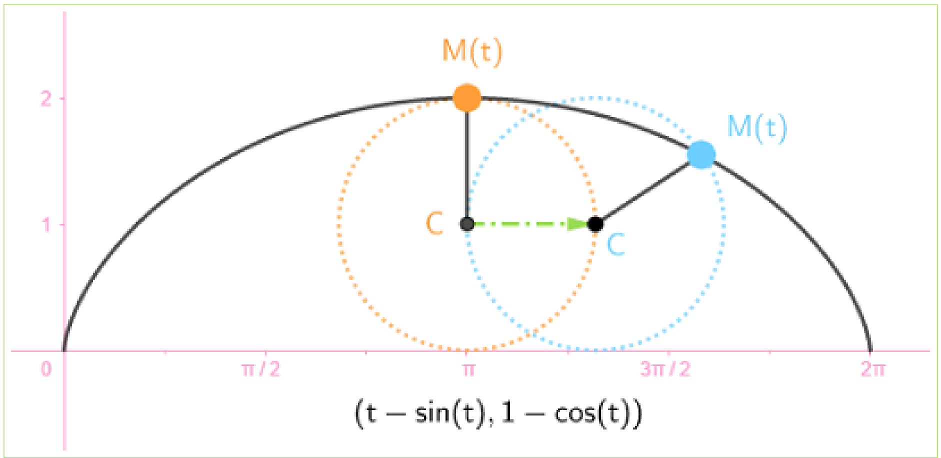
Exemples de courbes paramétrées planes

La rosace de Grandi a pour équation polaire $r=\cos(k\theta)$.
Sous forme paramétrique, on a $M(t)=(\cos(kt)\cos(t),\cos(kt)\sin(t)),\ k\in\mathbb{Z}$.
Pour $k=2$ et $t\in[0,2\pi]$, $M(t)=(\cos(2t)\cos(t),\cos(2t)\sin(t))$.
Pour $k=4$ et $t\in[0,2\pi]$, $M(t)=(\cos(4t)\cos(t),\cos(4t)\sin(t))$.

La courbe de Lissajous est une courbe fermée qui a pour équation paramétrique $M(t)=(\cos(t),\sin(nt)),\ t\in[0,2\pi]\ et\ n\in\mathbb{N}$.
Pour $k=2\ et\ k=3$ et $t\in[0,2\pi]$,
on a les courbes $M(t)=(\cos(t),\sin(2t))$ et $M(t)=(\cos(t),\sin(3t))$.

La cycloïde a pour équation paramétrique $M(t)=(R(t-\sin(t)),R(1-\cos(t))),\ t\in[0,2\pi]$.
Pour un rayon $R=1$, $M(t)=(t-\sin(t),1-\cos(t)),\ t\in[0,2\pi]$.





Changement de paramètre

Soit J une partie de $\mathbb{R}$ dans I . Soient les applications $\begin{array}{c} M: I \to \mathbb{R}^2 \\ t \to M(t) \end{array}$ et $\begin{array}{c} \varphi: I \to J \\ t \to u = \varphi(t) \end{array}$ alors l'application $\begin{array}{c} I \to J \to \mathbb{R}^2 \\ t \to \varphi(t) \to M(\varphi(t)) \end{array}$ est une nouvelle courbe paramétrée $M(\varphi(t))$ qui est déduite de la précédente $M(t)$ par un changement de paramètre t en $\varphi(t)$. Les deux courbes ont le même ensemble de points I . La nouvelle courbe $M(\varphi(t))$ est équivalente à l'ancienne courbe $M(t)$. Une même courbe admet une infinité de représentations paramétriques équivalentes.

Petit rappel : La notion d'applications équivalentes en un point t s'écrit sous la forme $f \sim g \ \ en \ \ t \ \Leftrightarrow \ \lim_{t} (\frac{f}{g}) = 1$.

Exemple de paramétrisation

Soit l'application $\begin{array}{c} M:]-\pi, \pi[\to \mathbb{R}^2 \\ t \to M(t) = (\cos(t), \sin(t)) \end{array}$ et soit le changement de paramètre donné par $\begin{array}{c} \varphi:]-\pi, \pi[\to \mathbb{R} \\ t \to \varphi(t) = tg(\frac{t}{2}) = u \end{array}$.

Les formules trigonométriques de demi-angle sont les suivantes :

$tg(2x) = \frac{2\, tg(x)}{1 - tg^2(x)}$; $\cos^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$; $\sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$; $tg(x) = \frac{\sin(2x)}{1 + \cos(2x)}$;

En posant $t = tg(\frac{x}{2})$ pour $x \neq \pi [2\pi]$, on a

$$\cos(x) = \cos(2.\frac{x}{2}) = \cos^2(\frac{x}{2}) - \sin^2(\frac{x}{2}) = \frac{\cos^2(\frac{x}{2}) - \sin^2(\frac{x}{2})}{\cos^2(\frac{x}{2}) + \sin^2(\frac{x}{2})} = \frac{\cos^2(\frac{x}{2})(1 - \frac{\sin^2(\frac{x}{2})}{\cos^2(\frac{x}{2})})}{\cos^2(\frac{x}{2})(1 + \frac{\sin^2(\frac{x}{2})}{\cos^2(\frac{x}{2})})} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$

De même, $\sin(x)=2\sin(\frac{x}{2})\cos(\frac{x}{2})=\frac{2\sin(\frac{x}{2})\cos(\frac{x}{2})}{\cos^2(\frac{x}{2})+\sin^2(\frac{x}{2})}=\frac{2t}{1+t^2}$

et $tg(x)=\frac{\sin(x)}{\cos(x)}=\frac{2t}{1-t^2}$.

On en déduit à partir de ces formules, la nouvelle représentation paramétrique équivalente à $M(t)$ qui est $M(u)=(\frac{1-u^2}{1+u^2},\frac{2u}{1+u^2})$.

Paramétrisation d'une ellipse

Soit une ellipse E d'équation $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$ où les constantes a et b sont strictement positives. Pour qu'un point $M(t)=(f(t),g(t))=(x,y)$ appartient à la courbe E , il faut et il suffit qu'il existe un nombre réel t tel que $\frac{x}{a}=\cos(t)$ et $\frac{y}{b}=\sin(t)$.

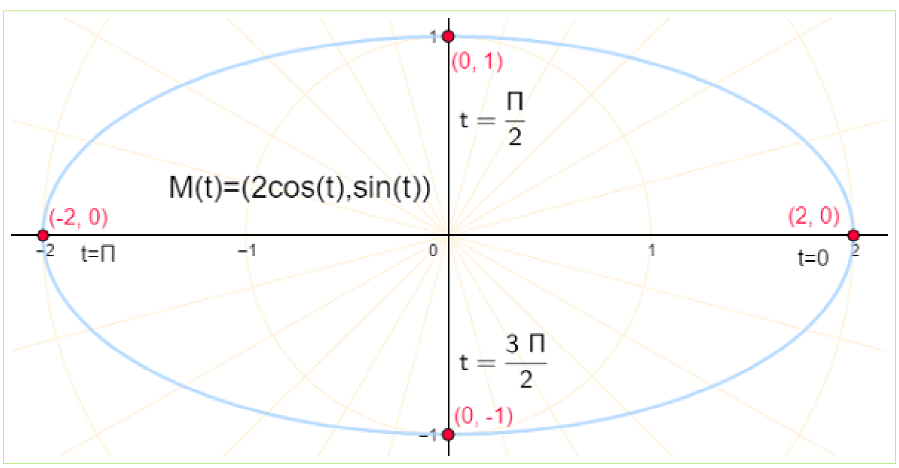
Donc E admet une représentation paramétrique $M(t)=(f(t),g(t))=(a\cos(t),b\sin(t))$.

Il existe d'autres représentations paramétriques pour cette équation E . Comme on a $M(t+2\pi)=(a\cos(t+2\pi),b\sin(t+2\pi))=M(t)$, on peut limiter l'étude de l'application dans l'intervalle $[-\pi,\pi]$.

Si on pose comme changement de paramètre $u=tg(\frac{t}{2})$, bijective quand $t\in]-\pi,\pi[$, l'application $u\rightarrow t=\varphi(u)=2\,arctg(u)$ donne une nouvelle paramétrisation de la courbe E .

Rappel: si $u=tg(\frac{t}{2})$ pour $t\in]-\pi,\pi[$ alors $\sin(t)=\frac{2u}{1+u^2}$, $\cos(t)=\frac{1-u^2}{1+u^2}$ et $tg(u)=\frac{2u}{1-u^2}$.

La nouvelle représentation paramétrique de l'équation E est $M(\varphi(u))=(f(\varphi(u)),g(\varphi(u)))=(a\frac{1-u^2}{1+u^2},b\frac{2u}{1+u^2})$.



Paramétrisation d'une fonction d'une variable réelle

Soit une fonction f définit sur un domaine I de R à valeurs dans R ; une paramétrisation du graphe de f , c'est-à-dire de la courbe d'équation $y=f(x)$, est tout simplement $M(t)=(x(t)=t, y(t)=f(t))$.

Orientation d'une courbe paramétrée

Pour certaines des notions qui vont suivre, nous avons besoin d'orienter la courbe paramétrée, c'est-à-dire de donner une direction de parcours de la trajectoire $M(t)$. On indique la direction de la trajectoire par une petite flèche sur la trajectoire. On prend le plus souvent l'orientation donnée par les t croissants. On peut alors parler d'un instant t avant un instant t_0 ($t \le t_0$) ou après t_0 ($t \ge t_0$).

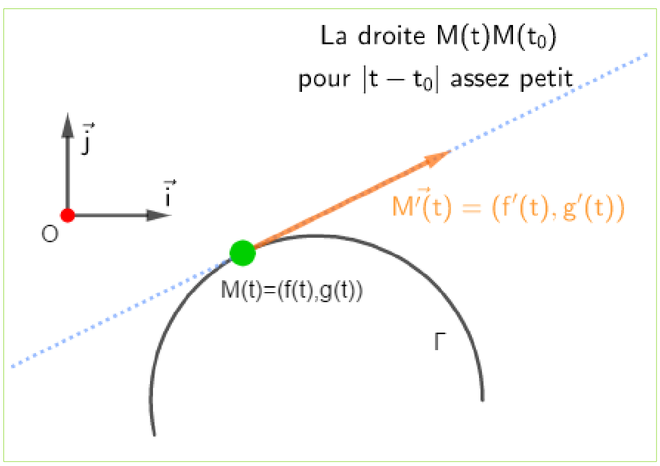
Pour toute la suite, la courbe est orientée suivant les t croissants.

2. Tangente à une courbe paramétrée

Soit Γ une courbe paramétrée $t \to M(t)$. On dit que Γ admet une tangente en $M(t_0)$ si le taux d'accroissement $\dfrac{M(t)-M(t_0)}{t-t_0} \to M'(t_0)$ quand $t \to t_0$. Cette limite s'appelle la tangente à Γ en $t=t_0$.

Pour $t \neq t_0$ et $|t-t_0|$ assez petit, on a $M(t) \neq M(t_0)$. Ainsi, la droite $M(t)M(t_0)$ est bien définie pour $t \neq t_0$ et $|t-t_0|$ assez petit. Cette droite est parallèle au vecteur $\dfrac{\overrightarrow{M(t)-M(t_0)}}{t-t_0} \to \vec{M}'(t_0)$ quand $t \to t_0$.

Le vecteur $\vec{M}'(t)$ s'appelle le vecteur vitesse pour la valeur t du paramètre.



En faisant un changement de paramètre t en $\varphi(t)$, l'application $\begin{matrix} I \to J \to \mathbb{R}^2 \\ t \to \varphi(t) \to M(\varphi(t)) \end{matrix}$ a pour dérivée $(M(\varphi(t)))' = M'(\varphi(t))\varphi'(t)$.

Si l'application $M(t)=(f(t),g(t))$ a pour vecteur dérivé $\vec{M}'(t_0)=(f'(t_0),g'(t_0))$ au point $t=t_0$, alors le vecteur $\vec{N}(t_0)=(g'(t_0),-f'(t_0))$ est normal au vecteur $\vec{M}'(t_0)$ puisque le produit scalaire des deux vecteurs en $t=t_0$ est $\vec{M}'(t_0).\vec{N}(t_0)=0$.

Si $\vec{M}'(t_0)=(f'(t_0),g'(t_0))=(0,0)$, on dit que la courbe $M(t)$ est stationnaire ou singulière en $t=t_0$. En un point $M(t_0)$ singulier, on étudie $\lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{g(t)-g(t_0)}{f(t)-f(t_0)}$.

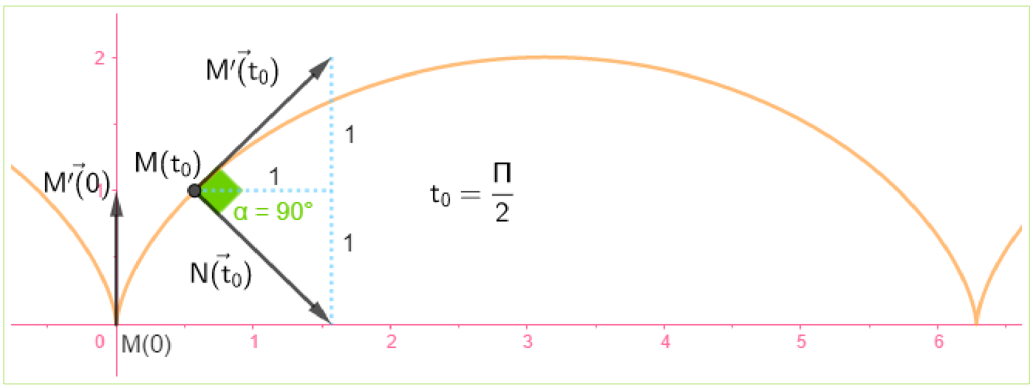
Si cette limite est finie, la tangente en $M(t_0)$ existe et a pour coefficient directeur cette limite finie.
Si cette limite existe mais est infinie, la tangente en $M(t_0)$ existe et est verticale.

Exemple de vecteur normal sur une cycloïde

Soit une cycloïde d'équation $M(t)=(f(t),g(t))=(t-\sin(t),1-\cos(t))$ sur $\mathbb{R}^2$ de dérivée $M'(t)=(f'(t),g'(t))=(1-\cos(t),\sin(t))$.
Soit le vecteur normal $\vec{N}(t)=(\sin(t),\cos(t)-1)$.

En $t=t_0=\frac{\pi}{2}$, le vecteur dérivé est $\vec{M}'(\frac{\pi}{2})=(f'(\frac{\pi}{2}),g'(\frac{\pi}{2}))=(1-\cos(\frac{\pi}{2}),\sin(\frac{\pi}{2}))=(1,1)$ et le vecteur normal $\vec{N}(t_0)=\vec{N}(\frac{\pi}{2})=(\sin(\frac{\pi}{2}),\cos(\frac{\pi}{2})-1)=(1,-1)$.

Le produit scalaire des deux vecteurs en $t=t_0$ est nul puisque $\vec{M}'(t_0).\vec{N}(t_0)=0$. Le vecteur $\vec{N}(t)$ en $t=t_0$ est bien normal au vecteur $M'(t_0)$.



$M'(t)=0 \Leftrightarrow f'(t)=1-\cos(t)=0 \;\; et \;\; g'(t)=\sin(t)=0$, soit $t=2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

Pour $t=0$, $\lim_{t\to 0}\frac{g(t)-g(0)}{f(t)-f(0)}=\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos(t)}{t-\sin(t)}=\lim_{t\to 0}\frac{1-1+\frac{t^2}{2}+o(1)}{t-t+\frac{t^3}{6}+o(1)}=\lim_{t\to 0}(\frac{3}{t}+o(1))=+\infty$.

La tangente en $M(0)$ existe et est verticale. Son vecteur est $\vec{M}'(0)=(0,1)$.

3. Forme de la courbe au voisinage d'un point

Supposons le point $M(t)$ continûment dérivable dans un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ contenant t_0 .

Soient $p\in\mathbb{N}, p>0 \;/\; \vec{M}^{(p)}(t_0)\neq 0$ et $q\in\mathbb{N}, q>p \;/\; \vec{M}^{(q)}(t_0)\neq 0 \;\; et \;\; non \;\; parallèle \;\; à \;\; \vec{M}^{(p)}(t_0)$.
Les deux vecteurs $\vec{M}^{(p)}(t_0)$ et $\vec{M}^{(q)}(t_0)$ sont linéairement indépendants.

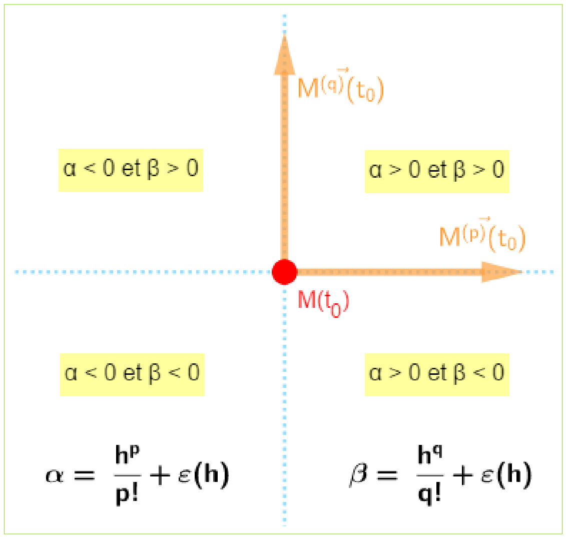
En utilisant la formule de Taylor-Young, on peut écrire :

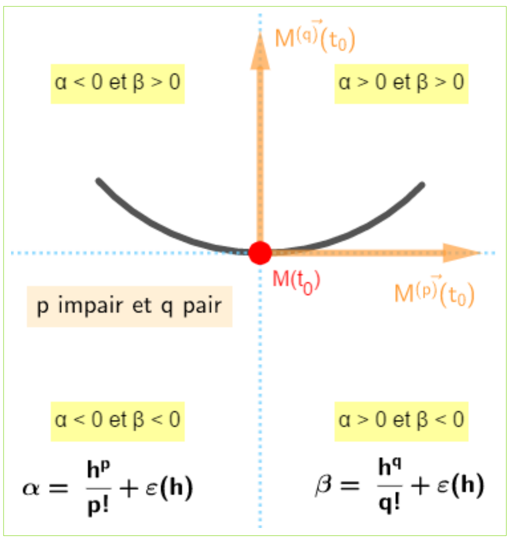
$$(M(t_0+h)-M(t_0))=\frac{h^p}{p!}\vec{M}^{(p)}(t_0)+\frac{h^{(p+1)}}{p+1!}\vec{M}^{(p+1)}(t_0)+..+\frac{h^{(q-1)}}{q-1!}\vec{M}^{(q-1)}(t_0)+\frac{h^q}{q!}(\vec{M}^{(q)}(t_0)+\vec{\varepsilon}(h))$$

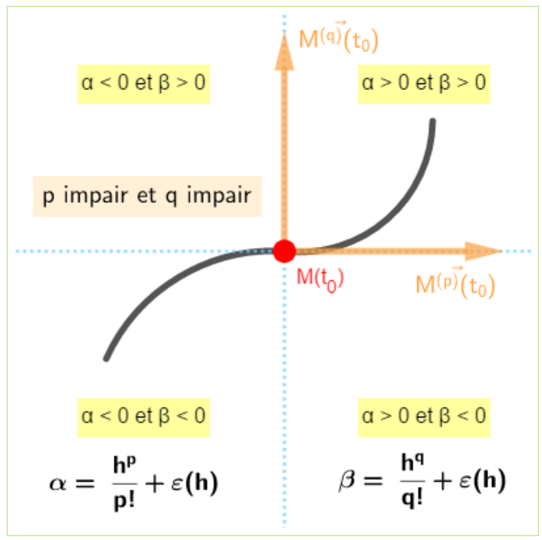
avec $\lim_{h\to 0}\vec{\varepsilon}(h)=0$ quand $h\to 0$.

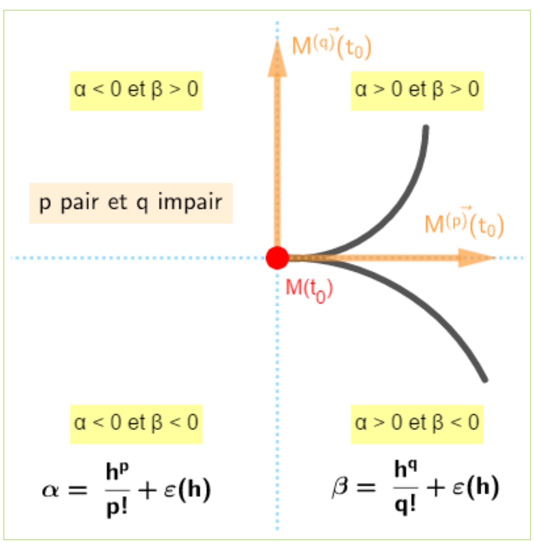
Si l'on prend le point $M(t_0)=(f(t_0),g(t_0))$ comme origine et les premiers vecteurs dérivées libres et non nuls $\vec{M}^{(p)}(t_0)$ et $\vec{M}^{(q)}(t_0)$ pour base B , les coordonnées du point $M(t_0+h)$ dans la base $B=(M(t_0),\vec{M}^{(p)}(t_0),\vec{M}^{(q)}(t_0))$ sont les suivantes :

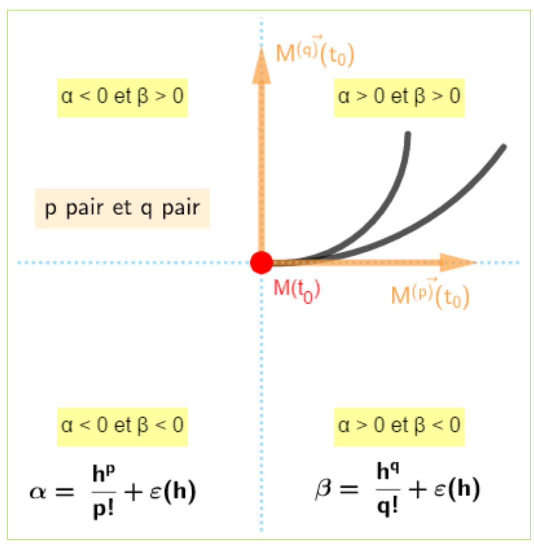
$M(t_0+h)=(f(t_0+h),g(t_0+h))=(\frac{h^p}{p!}+\varepsilon(h),\frac{h^q}{q!}+\varepsilon(h))=(\alpha,\beta)$ avec h petit mais non nul.











1^er^ cas : p impair et q pair

Pour $|h|$ assez petit et non nul, α dépend du signe de h et $\beta>0$.
La courbe tangente au voisinage de $t=t_0$ est du même côté que le vecteur $M^{(q)}(t_0)$.
On dit que l'on a un point ordinaire.

2^nd cas : p impair et q impair

Pour $|h|$ assez petit et non nul, α et β dépend du signe de h . La courbe traverse la tangente en $t=t_0$. On dit que l'on a un point d'inflexion.

3^ème cas : p pair et q impair

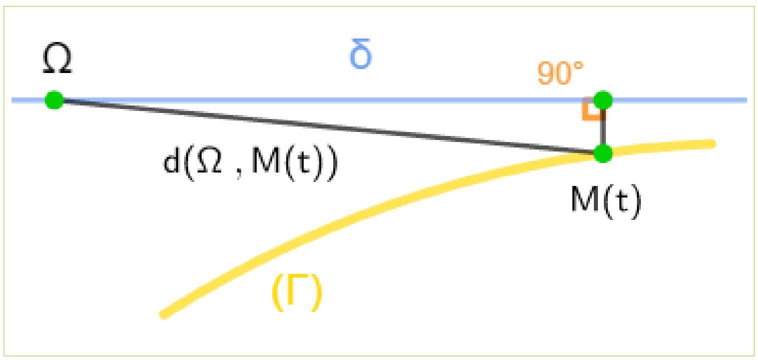
Pour $|h|$ assez petit et non nul, $\alpha>0$ et β dépend du signe de h . On dit que l'on a un point de rebroussement de première espèce.

4^ème cas : p pair et q pair

Pour $|h|$ assez petit et non nul, $\alpha>0$ et $\beta>0$. On dit que l'on a un point de rebroussement de deuxième espèce.

4. Étude des branches infinies

On dit que la courbe Γ présente une branche infinie quand $t \to t_0$ si la distance de $M(t)$ à un point fixe Ω (souvent Ω correspond à l'origine O) tend vers ∞ quand $t \to t_0$ par valeurs différentes de t_0 .



Soit le point $M(t)=(f(t),g(t))$. Pour que la courbe présente une branche infinie, il faut et il suffit que l'une au moins des fonction $|f|$, $|g|$ tendent vers ∞ quand $t \to t_0$ par valeurs différentes de t_0 . La notion de distance asymptotique est une notion intrinsèque qui est indépendante de tous facteurs extérieurs. Pour la définir, lorsque l'origine et la base sont définies, on utilise la pente $\frac{g(t)}{f(t)}$ de la droite $OM(t)$.

Théorème

Pour que la courbe est une direction asymptotique δ pour $t \to t_0$ par valeurs différentes de t_0 , il faut et il suffit, ou bien que $\frac{g(t)}{f(t)}$ ait une limite finie m (La direction asymptotique δ a alors pour pente m), ou bien que $|\frac{g(t)}{f(t)}|$ tend vers ∞ (La direction asymptotique δ est alors Oy).

Dans la pratique, si $\lim_{t \to t_0} f(t)=x_0$ et si $g(t) \to \pm\infty$, la droite d'équation $x=x_0$ est asymptote. C'est une asymptote verticale. Si $f(t)-x_0$ est positif, la courbe est à droite de l'asymptote, sinon elle est à gauche.

De même, si $\lim_{t\to t_0} g(t)=y_0$ et si $f(t)\to\pm\infty$, la droite d'équation $y=y_0$ est asymptote. C'est une asymptote horizontale. Si $g(t)-y_0$ est positif, la courbe est au dessus de l'asymptote, sinon elle est en dessous.

Si $f(t)\to\pm\infty$ et $g(t)\to\pm\infty$, la direction asymptotique, si elle existe, s'obtient en cherchant la limite $m(t)$ de $\frac{g(t)}{f(t)}$. Cette condition est nécessaire mais pas suffisante.

Si $m(t)$ est fini et non nul, la droite de pente $m(t)$ menée en $M(t)$ a pour équation $m(t)=\frac{y-g(t)}{x-f(t)}$ soit $y=m(t)x+g(t)-m(t)f(t)=m(t)x+b$. C'est une asymptote oblique à la courbe si $m(t)=\lim_{t\to t_0}\frac{g(t)}{f(t)}$ est finie et si $b=\lim_{t\to t_0}(g(t)-m(t)f(t))$ est également finie.

En résumé,

- Si $m(t)$ est fini et non nul et si $\lim_{t\to t_0}(g(t)-m(t)f(t))=\pm\infty$, on dit que la courbe possède une branche parabolique dans la direction $y=m(t)x$.
- Si $m(t)$ est fini et non nul et si $\lim_{t\to t_0}(g(t)-m(t)f(t))=b\in\mathbb{R}$, la droite d'équation $y=m(t)x+b$ est appelée asymptote oblique de la courbe en $t=t_0$.
- Si $m(t)=0$, on dit que la courbe possède une branche parabolique dans la direction $0x$.
- Si $m(t)=\pm\infty$, on dit que la courbe possède une branche parabolique dans la direction Oy .

5. Convexité, concavité, réciprocité

Étude de la convexité

Pour étudier la convexité d'une courbe $M(t)=(f(t),g(t))$, il faut calculer le vecteur vitesse $\vec{M}'(t)=(f'(t),g'(t))$ et le vecteur accélération $\vec{M}^{(2)}(t)=(f^{(2)}(t),g^{(2)}(t))$.
Pour savoir si la base $(M(t),\vec{M}'(t),\vec{M}^{(2)}(t))$ est directe ou indirect, on calcul le déterminant des deux vecteurs.

$$det(\vec{M}'(t),\vec{M}^{(2)}(t))=\begin{vmatrix} f'(t) & f^{(2)}(t) \\ g'(t) & g^{(2)}(t)\end{vmatrix}=(f'(t)g^{(2)}(t)-f^{(2)}(t)g'(t))$$

Si le déterminant est strictement supérieur à zéro, alors la courbe est convexe, s'il est strictement inférieur à zéro, alors la courbe est concave et si le déterminant est nul, alors on devrait avoir un point d'inflexion.

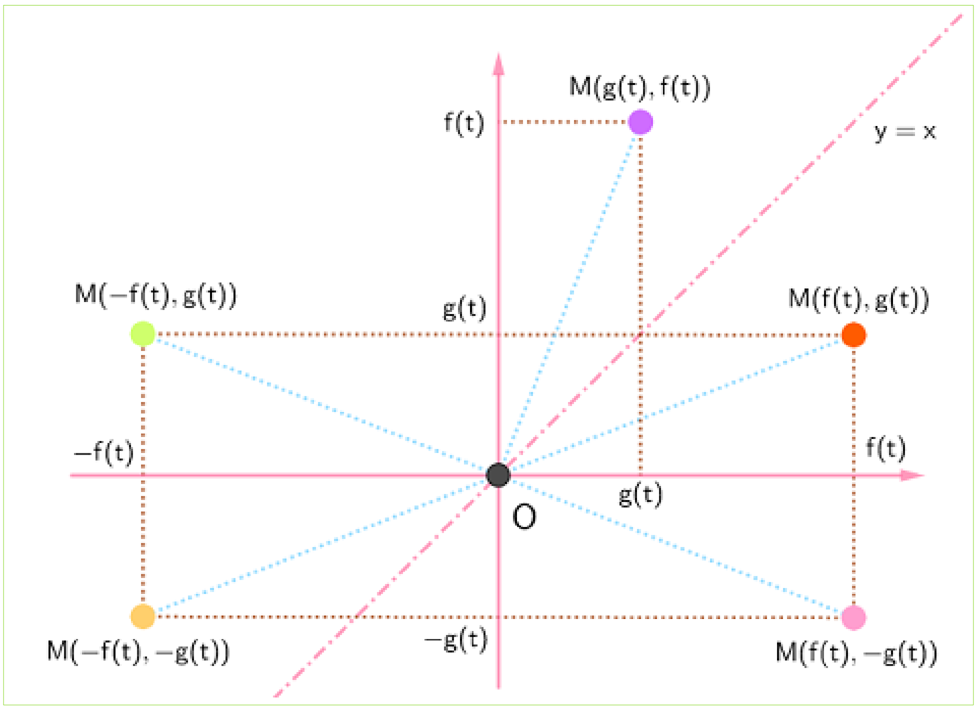
Dérivée de la fonction réciproque

Supposons $M(t)=(f(t),g(t))=(x,y)$ l'ensemble des points de la courbe continûment dérivable dans un intervalle ouvert I sur $\mathbb{R}$ contenant t_0 .

Supposons l'application $\begin{array}{c} f: I \to \mathbb{R} \\ t \to x = f(t) \end{array}$ continue et strictement monotone sur I. Soit $t_0 \in I$, si $f(t_0)$ est dérivable de dérivée non nulle en t_0 alors l'application réciproque $t_0 = f^{-1}(x_0)$ est dérivable en $x_0 = f(t_0)$ et $(f^{-1})'(x_0) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(x_0))} = \dfrac{1}{f'(t_0)}$.

Supposons l'application $y = g(t) = g(f^{-1}(x))$ dérivable de dérivée non nulle en $t = t_0$ alors $\dfrac{dy}{dx}(t_0) = g'(f^{-1}(x_0))(f^{-1})'(x_0) = \dfrac{g'(t_0)}{f'(t_0)}$. On retrouve la pente de la tangente $m(t_0) = \dfrac{f'(t_0)}{g'(t_0)}$.

6. Réduction de l'intervalle d'étude d'une courbe



- Dans le cas où I est symétrique par rapport à O et où $f(-t) = -f(t)$ et $g(-t) = g(t)$ alors $S(f(t), g(t)) = (-f(t), g(t))$. La courbe admet Oy comme axe de symétrie; on peut donc réduire l'intervalle d'étude à $t \geq 0$ et compléter par une symétrie par rapport à Oy .

- Dans le cas où I est symétrique par rapport à O et où $f(-t) = f(t)$ et $g(-t) = -g(t)$ alors $S(f(t), g(t)) = (f(t), -g(t))$. La courbe admet Ox comme axe de symétrie; on peut donc réduire l'intervalle d'étude à $t \geq 0$ et compléter par une symétrie par rapport à Ox .

- Dans le cas où I est symétrique par rapport à O et où $f(-t) = -f(t)$ et $g(-t) = -g(t)$ alors $S(f(t), g(t)) = (-f(t), -g(t))$. La courbe admet O comme centre de symétrie; on peut donc réduire l'intervalle d'étude à $t \geq 0$ et compléter par une symétrie par rapport à O .

- Dans le cas où I est symétrique par rapport à O et où $f(-t) = g(t)$ et $g(-t) = f(t)$ alors $S(f(t), g(t)) = (g(t), f(t))$. La courbe admet une symétrie par rapport à la droite d'équation $y=x$. On peut donc réduire l'intervalle d'étude à $t\geq 0$ et compléter par une symétrie par rapport à la droite d'équation $y=x$.

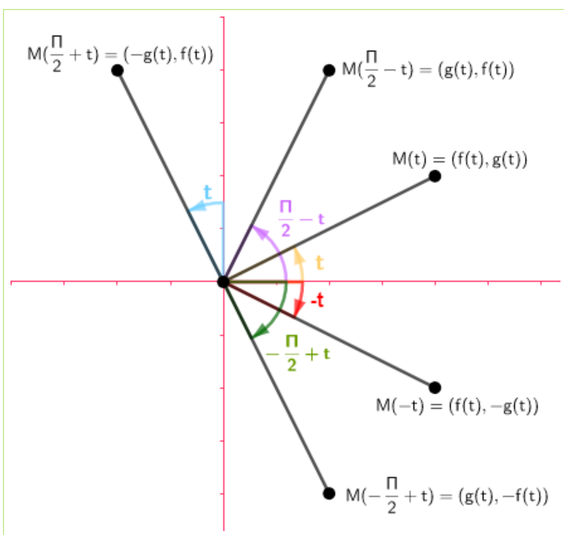
- Dans le cas où I est symétrique par rapport à O et où $f(-t)=-g(t)$ et $g(-t)=-f(t)$ alors $S(f(t),g(t))=(-g(t),-f(t))$. La courbe admet une symétrie par rapport à la droite d'équation $y=-x$. On peut donc réduire l'intervalle d'étude à $t\geq 0$ et compléter par une symétrie par rapport à la droite d'équation $y=-x$.
- Dans le cas où I est symétrique par rapport à $\frac{a}{2},\ a\in\mathbb{R}$ et où $f(a-t)=f(t)$ et $g(a-t)=g(t)$ alors $\forall t\in I$, le point $M(a-t)$ coïncide avec le point $M(t)$. Or l'application $t\rightarrow a-t$ est géométriquement la symétrie de $\mathbb{R}$ par rapport à $\frac{a}{2}$. Lorsque $t\in[\frac{a}{2},+\infty[$, $a-t\in]-\infty,\frac{a}{2}]$ d'où l'étude sur $I\cap[\frac{a}{2},+\infty[$.

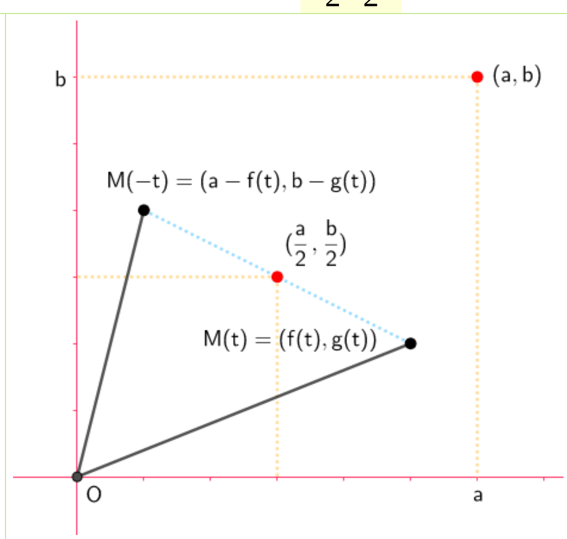
Dans le cas trigonométrique où t représente l'angle polaire de M et seulement dans ce cas, on peut bénéficier d'autres réductions de l'intervalle d'étude.

- Si $f(-t)=-g(t)$ et $g(-t)=f(t)$ alors $S(f(t),g(t))=(-g(t),f(t))$: la courbe admet une symétrie d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de centre O .
- Si $f(-t)=-g(t)$ et $g(-t)=f(t)$ alors $S(f(t),g(t))=(g(t),-f(t))$: la courbe admet une symétrie d'angle $-\frac{\pi}{2}$ et de centre O .

Plus généralement,

- Si $f(-t)=a-f(t)$ et $g(-t)=b-g(t)$ alors $S(f(t),g(t))=(a-f(t),b-g(t))$: la courbe admet une symétrie par rapport au point $(\frac{a}{2},\frac{b}{2})$.





Périodicité

Soient les fonctions périodiques $f(t)$ et $g(t)$ admettant une période commune. Notons T , cette période commune positive et qui est la plus petite possible de $f(t)$ et $g(t)$; on a alors $\forall t\in D_f$, $f(t+T)=f(t)$ et $g(t+T)=g(t)$.

Ainsi, pour l'intervalle $t\in[t_0,t_0+T],\ t_0\in\mathbb{R}$, la courbe est entièrement décrite.

7. Construction des courbes paramétrées planes

Pour construire une courbe paramétrée définie par les équations paramétriques $x=f(t)$ et $y=g(t)$, on étudie les deux fonctions $f(t)$ et $g(t)$ selon le plan ci-dessous :

- On recherche les ensembles de définition D_f de $f(t)$ et de $g(t)$;
- On examine si les fonctions $f(t)$ et $g(t)$ sont des fonctions périodiques, paires ou impaires ;
- On étudie le sens de variation de $f(t)$ et de $g(t)$;
- On définit les points particuliers correspondant à des valeurs remarquables du paramètre t , et les tangentes en ces points ;
- On étudie les branches infinies ;
- On étudie la concavité ;
- On trace la courbe.

Exemple de construction d'une courbe paramétrée plane

Soit la courbe paramétrée définit par $M(t)=(t+\frac{1}{t},t+\frac{1}{2t^2})=(f(t),g(t))$.

Le domaine de définition est $D_f=\mathbb{R}^*$ car les applications $f(t)$ et $g(t)$ sont définies dans $\mathbb{R},\ \forall t\neq 0$.

L'application $f(t)$ est impaire car $f(-t)=-f(t)$.

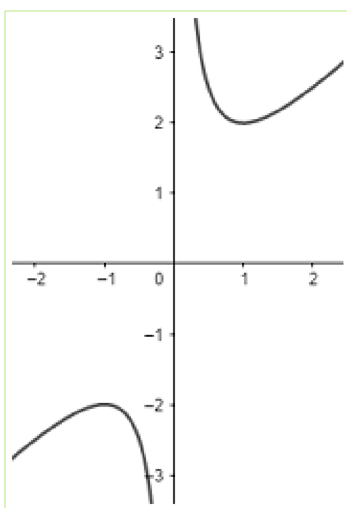
L'application $g(t)$ n'est ni paire, ni impaire.

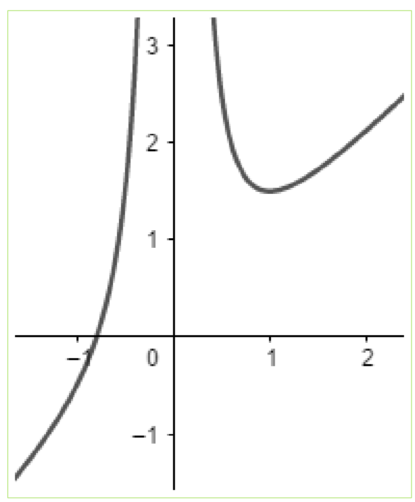
Dans D_f , la dérivée de la courbe est $M'(t)=(1-\frac{1}{t^2},1-\frac{1}{t^3})=(\frac{t^2-1}{t^2},\frac{t^3-1}{t^3})$.

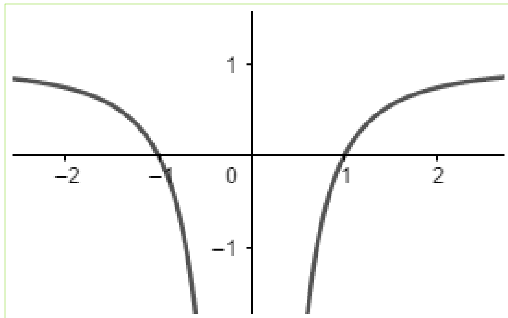
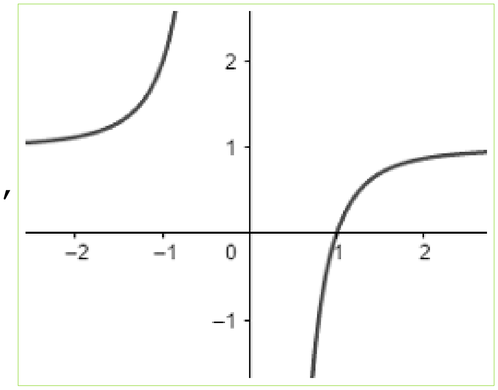
$M'(t)=0 \ \Leftrightarrow \ f'(t)=0 \ \ et \ \ g'(t)=0$;

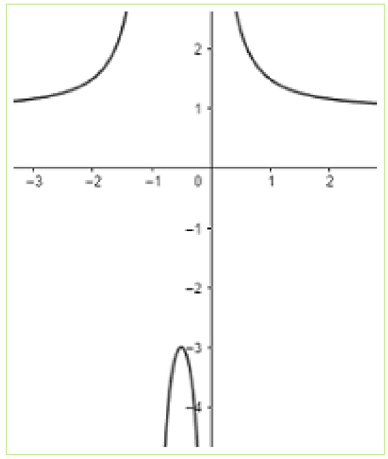
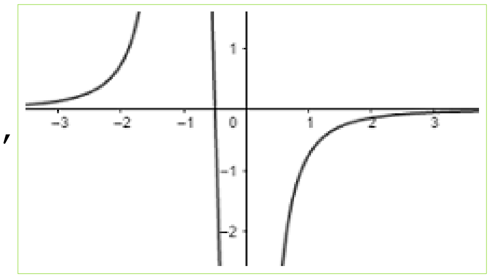
Soient $f'(t)=0 \ \Rightarrow \ t=\pm 1 \ \ dans \ \mathbb{R}$ et $g'(t)=0 \ \Rightarrow \ t=+1 \ \ dans \ \mathbb{R}$.

- Traçons le tableau de variation de la courbe paramétrée :

$f(t)=t+\frac{1}{t}$, $g(t)=t+\frac{1}{2t^2}$: 

, 

$f'(t)=\dfrac{t^2-1}{t^2}$, $g'(t)=\dfrac{t^3-1}{t^3}$:  , 

$m(t)=1+\dfrac{1}{t(t+1)}$, $m'(t)=-\dfrac{2t+1}{t^2(t+1)^2}$:  , 

t	-∞	**-1**		$-\frac{1}{2}$		**0**		**+1**	+∞
$f'(t)$	+	**0**		-		‖	-	**0**	+
$f(t)$	-∞ ↗	-2	↘	$-\frac{5}{2}$	↘ -∞	‖	+∞ ↘	+2	↗ +∞
$g(t)$	-∞ ↗	$-\frac{1}{2}$	↗	$+\frac{3}{2}$	↗ +∞	‖	+∞ ↘	$+\frac{3}{2}$	↗ +∞
$g'(t)$	+	+2		+		‖	-	**0**	+
$m(t)=\frac{g'(t)}{f'(t)}$	1 ↗ +∞	‖	-∞ ↗	-3	↘ -∞	‖		+∞ ↘ 1	
$m'(t)$	+	‖	+	**0**	-	‖	-	$-\frac{3}{4}$	-

Pour $t\neq 0$ et $t\neq 1$, $f'(t)$ et $g'(t)$ existent et ne sont pas tous les deux nulles en même temps. La courbe admet une tangente en $M(t)$ de pente $m(t)$.

$$m(t)=\frac{g'(t)}{f'(t)}=\frac{t^3-1}{t^3}\frac{t^2}{t^2-1}=\frac{t^2+t+1}{t(t+1)}=1+\frac{1}{t(t+1)}$$

Sa dérivée est $m'(t)=-\dfrac{2t+1}{t^2(t+1)^2}$; $m'(t)=0 \Leftrightarrow t=-\dfrac{1}{2}$

Si $t<-\dfrac{1}{2}$, $m'(t)>0$; Si $t>-\dfrac{1}{2}$, $m'(t)<0$.

Quand $t\to\pm\infty$, on a $f(t)\to\pm\infty$ et $g(t)\to\pm\infty$; la pente est $m(t)=1$ et

$$b=\lim_{t\to\pm\infty}(g(t)-m(t)f(t))=\lim_{t\to\pm\infty}(t+\frac{1}{2t^2}-t-\frac{1}{t^2})=\lim_{t\to\pm\infty}(\frac{-1}{2t^2})=0$$

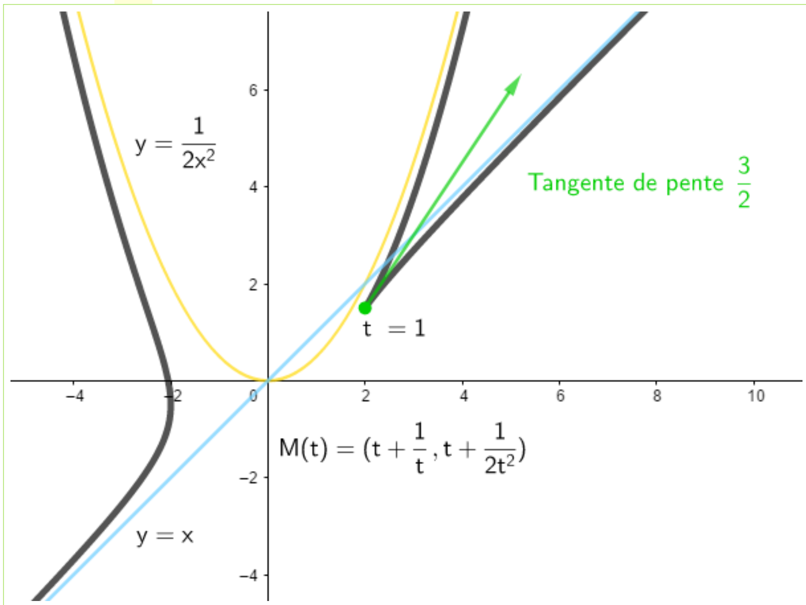
Ainsi l'équation de l'asymptote oblique est $y=x$.

Pour étudier la tangente en $t_0=1$, calculons les dérivées $f^{(2)}(t)$ et $g^{(2)}(t)$;

$f^{(2)}(t)=\frac{2}{t^3} \Rightarrow f^{(2)}(1)=2>0$

$g^{(2)}(t)=\frac{3}{t^4} \Rightarrow g^{(2)}(1)=3>0$

Comme les dérivées d'ordres deux sont non nulles et paires, on dit que l'on a un point de rebroussement de deuxième espèce. En ce point, il y a une tangente de pente $\frac{3}{2}$.



Autre exemple de courbe paramétrée plane

Soit la courbe paramétrée définie par $M(t)=(2\cos(2t),\sin(3t))$.

L'application $M:t \rightarrow M(t)$ est définie et de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ d'où $D_f=\mathbb{R}$.

Comme l'application $M(t)$ est 2π périodique, c'est à dire $M(t+2\pi)=M(t)$, on peut limiter l'étude à l'intervalle $[-\pi,\pi]$.

Comme $f(-t)=f(t)$ et $g(-t)=-g(t)$ alors $S(f(t),g(t))=(f(t),-g(t))$. La courbe admet Ox comme axe de symétrie; on peut donc réduire l'intervalle d'étude à $t\geq 0$ et compléter par une symétrie par rapport à Ox .

on peut de nouveau réduire l'intervalle d'étude à $[0,\pi]$.

De plus, $M(\frac{\pi}{2}-t)$ et $M(\frac{\pi}{2}+t)$ sont confondus. Le point $M(\frac{\pi}{2}-t)$ coïncide avec le point $M(\frac{\pi}{2}+t)$. On peut limiter l'étude sur un intervalle plus restreint $[0,\frac{\pi}{2}]$.

Dans D_f , sa dérivée est $M'(t)=(-4\sin(2t),3\cos(3t))$.

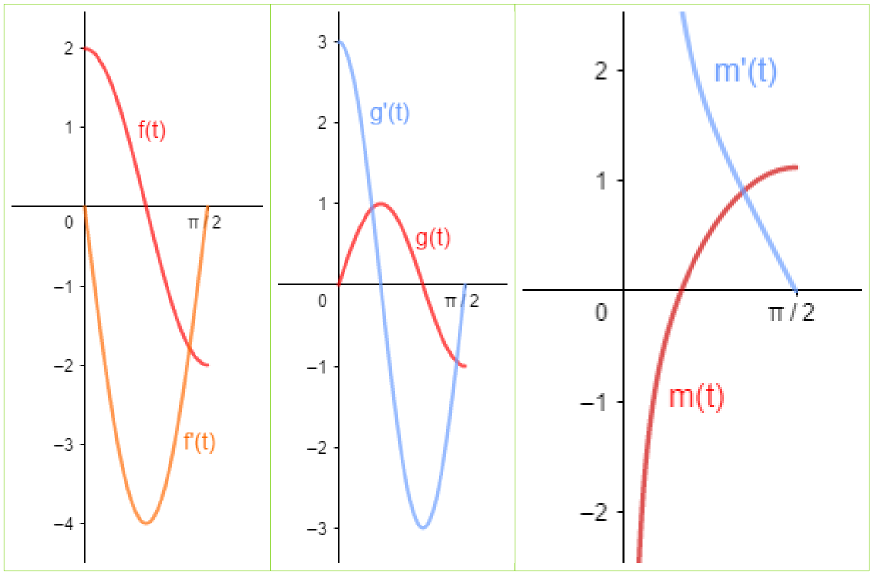
$M'(t)=0 \Leftrightarrow f'(t)=-4\sin(2t)=0 \; et \; g(t)=3\cos(3t)=0$.

Soient $t=k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$ et $t=\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

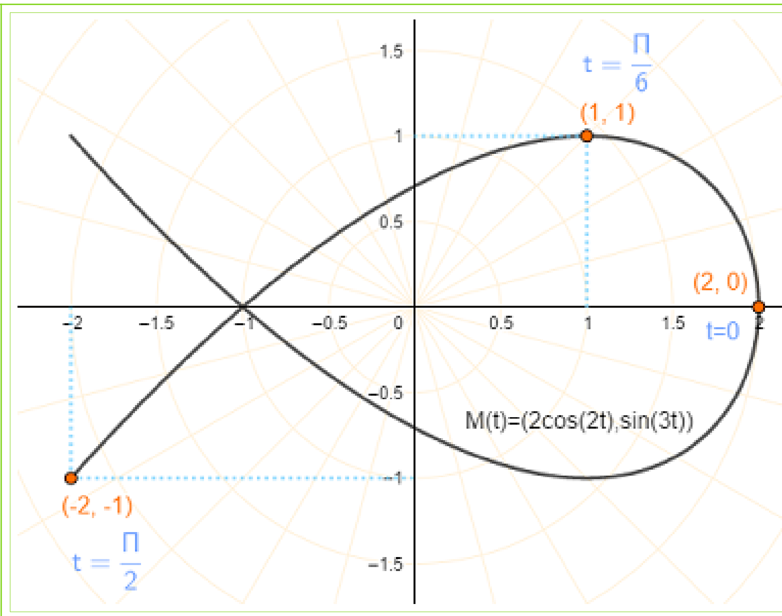
$$m(t)=\frac{3\cos(3t)}{-4\sin(2t)}$$

Il n'y a ni asymptote verticale ni asymptote horizontale, ni asymptote oblique.

- Traçons le tableau de variation de la courbe paramétrée :



t	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$
$f'(t)$	0	-	$2\sqrt{3}$	-	0
$f(t)$	2	↘	1	↘	-2
$g'(t)$	3	+	0	-	0
$g(t)$	0	↗	1	↘	-1
$m(t)=\frac{g'(t)}{f'(t)}$	$-\infty$	↗	0	↗	$\frac{0}{0}$
$m'(t)$	∞	+	2.6	+	0



8. Enveloppe d'une famille de droites à une courbe paramétrée

On se place dans un plan euclidien orthonormé. On se donne une famille de droites indexées par un paramètre t . La droite $D(t)$ dans le plan a pour équation $a(t)x+b(t)y+c(t)=0$, où $a(t)$, $b(t)$ et $c(t)$ sont des applications de classes C^1 sur $I\in\mathbb{R}$.

S'il existe une courbe paramétrée où la tangente à cette courbe est $D(t)$ $\forall t\in I$ alors cette courbe est paramétrée par $M(t)=(x(t),y(t))$. Les applications $x(t)$ et $y(t)$ sont solutions du système $\begin{matrix} a(t)x(t)+b(t)y(t)+c(t)=0 \\ a'(t)x(t)+b'(t)y(t)+c'(t)=0 \end{matrix}$. La première équation exprime que le point $M(t)$ est sur la courbe.

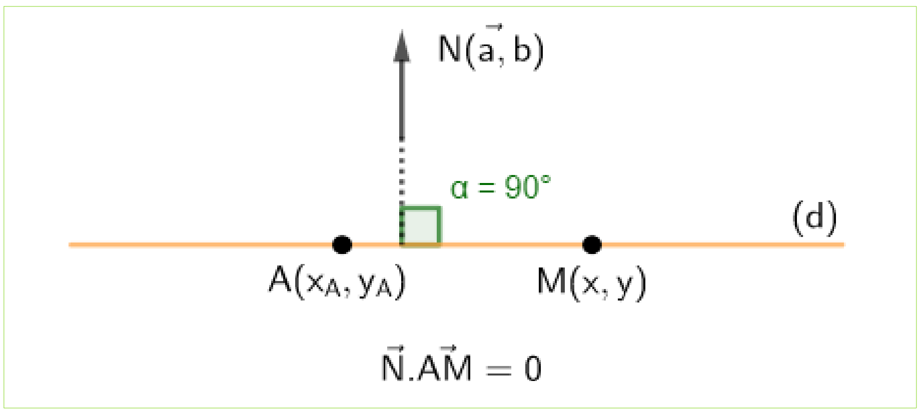
En dérivant cette première équation, on obtient :
$(a(t)x+b(t)y+c(t))'=a'(t)x(t)+a(t)x'(t)+b'(t)y(t)+b(t)y'(t)+c'(t)=0$

Le vecteur vitesse en $t\in I$ est $\vec{M}'(t)=(\vec{x}'(t),\vec{y}'(t))$ et le vecteur normal en $t\in I$ est $\vec{N}(t)=(\vec{y}'(t),-\vec{x}'(t))$.

Rappel : un vecteur non nul est normal à une droite (d) lorsque la normale est perpendiculaire à (d) . Soient deux points $(A,M)\in(d)$. Si $\vec{N}(a,b)$ est perpendiculaire à (d) , alors le produit scalaire $\vec{N}(a,b).\vec{AM}(x-x_A,y-y_A)=0$.

Du produit scalaire $\vec{N}(a,b).\vec{AM}(x-x_A,y-y_A)=0$
On a $a(x-x_A)+b(y-y_A)=0$
Soit $ax+by-x_A-y_A=0$
Ou bien $ax+by+c=0\ \ avec\ \ c=-x_A-y_A$

On retrouve bien la forme d'une équation cartésienne de la droite (d) .



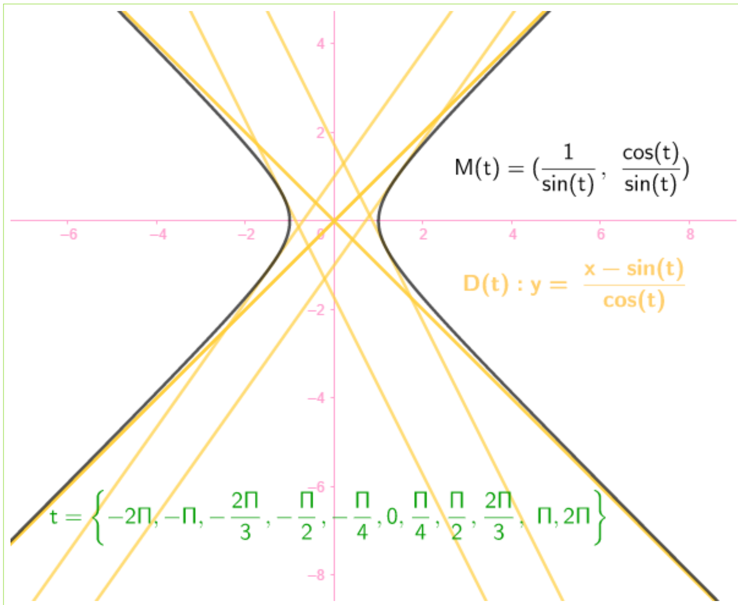
Dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, la droite d'équation $ax+by+c=0$ admet $\vec{N}(a,b)$ comme vecteur normal.

Or la normale au point de paramètre $t\in I$ est dirigée par le vecteur $\vec{N}(a(t),b(t))$. Ce vecteur est perpendiculaire à la tangente dirigée par $\vec{M}'(t)=(\vec{x}'(t),\vec{y}'(t))$. Le produit scalaire de ces deux vecteurs est nul, c'est à dire que $\vec{N}(a(t),b(t)).\vec{M}(x'(t),y'(t))=0$, soit $a(t)x'(t)+b(t)y'(t)=0$.
Comme $(a(t)x+b(t)y+c(t))'=a'(t)x(t)+a(t)x'(t)+b'(t)y(t)+b(t)y'(t)+c'(t)=0$, on en déduit la seconde équation du système $a'(t)x(t)+b'(t)y(t)+c'(t)=0$.

Exemple de tangente à une courbe

Soit la droite $D(t)$ d'équation $x-ycos(t)-\sin(t)=0$.
Le système d'équations à résoudre est le suivant : $\begin{matrix} x(t)-y(t)\cos(t)-\sin(t)=0 \\ y(t)\sin(t)-\cos(t)=0 \end{matrix}$.

On en déduit que la courbe paramétrée $M(t)=(x(t)=\dfrac{1}{\sin(t)},\ y(t)=\dfrac{\cos(t)}{\sin(t)})$ définit l'enveloppe d'une famille de droites tangentes à cette courbe.



Exemple de tangente à un point

Soit la droite $D(t)$ d'équation $y - tx = 0$.

Le système d'équations à résoudre est le suivant : $\begin{matrix} y(t) - t\,x(t) = 0 \\ x(t) = 0 \end{matrix}$.

On en déduit que la courbe paramétrée $M(t) = (0,0),\ \forall t \in \mathbb{R}$, correpondant à un seul point, définit l'enveloppe d'une famille de droites tangentes en ce point.