Dérivées des fonctions vectorielles

Table des matières

Ce document de mathématiques a été rédigé par Didier VERHILLE

Un exemple classique de fonction vectorielle est celui des courbes paramétrées planes $M(t)=(f(t),g(t))$, c'est-à-dire des fonctions d'une variable réelle t (représentant par exemple le temps dans les applications en mécanique du point) à valeurs dans un espace euclidien, comme par exemple le plan usuel $\mathbb{R}^2$ (on parle alors de courbes paramétrées planes) ou l'espace usuel $\mathbb{R}^3$ (on parle alors de courbes gauches).

En cinématique, la dérivée d'un point $M(t)$ en mouvement par rapport au temps t est le vecteur vitesse $\frac{d\vec{M}}{dt}(t)$.

1. Définition

Un rappel sur les fonctions vectorielles

Une fonction vectorielle est une fonction dont l'espace d'arrivée est un ensemble de vecteurs, son ensemble de définition pouvant être un ensemble de scalaires ou de vecteurs.

Dans ce chapitre, nous allons considérer la fonction vectorielle $\vec{f}$ d'un intervalle $I\subset\mathbb{R}$ à valeur dans $\mathbb{R}^n$ (en l'occurrence, $n=2$ ou $n=3$), c'est à dire $\vec{f}:I\to\mathbb{R}^n$. On note $f_1,f_{2,\ldots},f_n:I\to\mathbb{R}$ les fonctions coordonnées associées à $\vec{f}$, $\vec{f}(t)=(f_1(t),f_2(t),\ldots,f_n(t))=f_1(t)\vec{e}_1+f_2(t)\vec{e}_2+\ldots+f_n(t)\vec{e}_n,\ \forall t\in I$ où les $\vec{e}_i=(0,0,..,e_i=1,..,0),\ \forall i\in[1,n]$ sont les vecteurs unités de la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

On peut déduire des propriétés de $\vec{f}$ sur celles des f_i et réciproquement.

$\vec{f}(t)$ tend vers un vecteur $\vec{u}=(u_{1,\ldots},u_n)$ quand t tend vers t_0 (éventuellement $t\to\pm\infty$) si et seulement si chaque scalaire $f_i(t)$ tend vers u_i quand $t\to t_0$.

- $\vec{f}$ est continue sur I si et seulement si chaque f_i l'est ;
- $\vec{f}$ est dérivable sur I si et seulement si chaque f_i l'est.

Si $\vec{f}$ est dérivable sur I , sa dérivée correspond à la dérivation composante par composante $\vec{f}'(t)=(f'_1(t),f'_2(t),\ldots,f'_n(t))=f'_1(t)\vec{e}_1+f'_2(t)\vec{e}_2+\ldots+f'_n(t)\vec{e}_n,\ \forall t\in I$.

Nous verrons dans la suite de ce chapitre que le vecteur $\vec{f}'(t)\neq 0$ représente le vecteur tangent à la courbe représentative de $\vec{f}(t)$ au point $M(t)$.

Définition de la dérivée d'une fonction vectorielle

Soient un intervalle $I\in\mathbb{R}$, E un evn (espace vectoriel normé) et une application vectorielle $\begin{matrix}\vec{f}:I\to E\\ x\to\vec{f}(x)\end{matrix}$. Soient un point $x_0\in I$ et un vecteur $\vec{u}\in E$.

On dit que $\vec{f}$ est dérivable en x_0 , de dérivée $\vec{u}$, si le taux d'accroissement $\dfrac{\overrightarrow{f(x)-f(x_0)}}{x-x_0}$ admet une limite quand x tend vers x_0 . Cette limite est notée $\vec{f}'(x_0)$ est s'appelle le vecteur dérivé de $\vec{f}(x)$ en x_0 . On peut abréger son écriture en notant $\lim\limits_{x\to x_0,x\neq x_0}(\dfrac{\overrightarrow{f(x)-f(x_0)}}{x-x_0})=\vec{u}=\vec{f}'(x_0)$.

On dit que $\vec{f}(x)$ est dérivable en x_0 ssi $\vec{f}(x)$ est dérivable à droite $x\to x_0^+$ et à gauche $x\to x_0^-$ en x_0 .

Le taux d'accroissement est un vecteur de E car $\dfrac{\overrightarrow{f(x)-f(x_0)}}{x-x_0}\in E$.

La limite du taux d'accroissement peut également s'écrire : $\lim\limits_{x\to x_0,x\neq x_0}(\dfrac{\overrightarrow{f(x)-f(x_0)}}{x-x_0})=\vec{f}'(x_0)=\dfrac{d\vec{f}}{dx}(x_0)\Leftrightarrow\dfrac{\overrightarrow{f(x_0+h)-f(x_0)}}{h}=\vec{f}'(x_0)+\vec{\varepsilon}(h),\ x=x_0+h$ où le vecteur $\vec{\varepsilon}(h)$ est un vecteur de E qui tend vers $\vec{0}$ car $\|\vec{\varepsilon}(h)\|\to 0$ quand $h\to 0$.

En prenant la norme du taux d'accroissement en fonction de la dérivée, on a $\|\dfrac{\overrightarrow{f(x_0+h)-f(x_0)}}{h}\|=\|\vec{f}'(x_0)+\vec{\varepsilon}(h)\|\to\|\vec{f}'(x_0)\|\ \ quand\ \ h\to 0$.

Si les composantes de $\vec{f}$ sont $\vec{f}=(f_1,\ldots,f_n)$, alors $\vec{f}$ est dérivable en x_0 ssi chaque composante scalaire $f_i,\ \forall i\in[1,n]$, appelé fonction composante de $\vec{f}$, est dérivable en x_0 . Ainsi, on ramène la dérivée d'une fonction vectorielle $\vec{f}(x)$ en x_0 à celle d'une fonction scalaire $f_i(x),\ \forall i\in[1,n]$. Dans ce cas, la dérivée de l'application vectorielle $\vec{f}(x_0)=(f_1(x_0),\ldots,f_n(x_0))$ est $\vec{f}'(x_0)=(f'_1(x_0),\ldots,f'_n(x_0))$.

On dit que $\vec{f}$ est dérivable sur I si $\vec{f}$ est dérivable en tout point de I . $\vec{f}'$ s'appelle alors la fonction dérivée de $\vec{f}$.

Exemples de dérivées vectorielles

➔ Soit $\begin{matrix}\vec{f}:[0,1]\to\mathbb{R}^2\\ t\to(\cos(t),\sin(t))\end{matrix}$; Dans la base $(\vec{i},\vec{j})$, $\vec{f}(t)=\cos(t)\vec{i}+\sin(t)\vec{j}$. Sa dérivée vectorielle est $f'(t)=(-\sin(t),\cos(t))=-\sin(t)\vec{i}+\cos(t)\vec{j}$.

➔ Soit $\begin{matrix}\vec{g}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2\\ t\to(\mathrm{e}^t,\mathrm{e}^{-t})\end{matrix}$; Dans la base $(\vec{i},\vec{j})$, $\vec{g}(t)=\mathrm{e}^t\vec{i}+\mathrm{e}^{-t}\vec{j}$. Sa dérivée vectorielle est $\vec{g}'(t)=(\mathrm{e}^t,-e^{-t})=\mathrm{e}^t\vec{i}-\mathrm{e}^{-t}\vec{j}$.

➔ Soit $\begin{matrix}\vec{h}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3\\ t\to(\mathrm{e}^t,\mathrm{e}^{-t},t)\end{matrix}$; Dans la base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, $\vec{h}(t)=\mathrm{e}^t\vec{i}+\mathrm{e}^{-t}\vec{j}+t\vec{k}$. Sa dérivée vectorielle est $\vec{h}'(t)=(\mathrm{e}^t,-e^{-t},1)=\mathrm{e}^t\vec{i}-\mathrm{e}^{-t}\vec{j}+\vec{k}$.

En cinématique, la dérivée d'un point est le vecteur vitesse.

Le vecteur vitesse $\vec{v}(t)$ d'un point $M(t)$ en mouvement par rapport à une base orthonormée $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'un espace vectoriel E est le vecteur dérivé de ce point par rapport au temps.

Soit l'application vectorielle $\begin{array}{c} \vec{OM} : \mathbb{R}^+ \to E \\ t \to \vec{OM}(t) = (x(t), y(t)) \end{array}$;

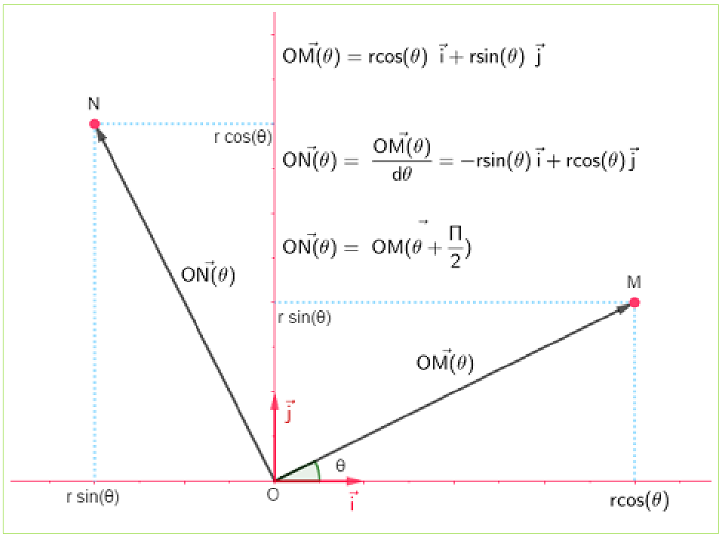
Son vecteur vitesse est l'application $\begin{array}{c} \vec{v} : \mathbb{R}^+ \to E \\ t \to \vec{v}(t) = \dfrac{d\vec{OM}(t)}{dt} = (\dot{x}(t), \dot{y}(t)) \end{array}$;

La notation $\dot{x}(t)$ correspond, en physique, à la dérivée de x par rapport au temps t, c'est à dire que $\dot{x}(t) = \dfrac{dx}{dt}(t)$.

Par exemple, soit $x(t) = r(t)\cos\theta(t)$ et $y(t) = r(t)\sin\theta(t)$, les coordonnées cartésiennes du vecteur $\vec{OM}(t)$ liées aux coordonnées polaires.

Alors, on a $\vec{v}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t)) = (\dot{r}(t)\cos\theta(t) - r(t)\sin\theta(t)\dot{\theta}(t),\ \dot{r}(t)\sin\theta(t) + r(t)\cos\theta(t)\dot{\theta}(t))$

Dérivée vectorielle dans le plan



Dans la base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$, le vecteur $\vec{ON}(\theta)$ se déduit du vecteur $\vec{OM}(\theta)$ par une rotation de $\dfrac{\pi}{2}$.

Différence entre un espace affine et un espace vectoriel

L'espace naturel pour faire de la géométrie est un espace homogène, où tous les points jouent le même rôle, ce qui n'est pas le cas dans un espace vectoriel, où le vecteur nul joue un rôle particulier et tient naturellement lieu d'origine. Un espace affine est un espace vectoriel dont on a oublié où se trouve l'origine. Tout espace vectoriel est naturellement muni d'une structure d'espace affine. Inversement, tout espace affine s'identifie à un espace vectoriel dès qu'on y choisit une origine.

Soient E un $K-ev$ et A un $K-ea$ (K espace affine). Les éléments de E sont des vecteurs et les éléments de A sont des points.

Un $K-ea$ attaché au $K-ev$ est une application $\begin{array}{c} \vec{f} : A^2 \to E \\ (M, N) \to \vec{MN} \end{array}$ vérifiant les propriétés suivantes :

- $\forall (M, N, P) \in A^3$, $\vec{MP} = \vec{MN} + \vec{NP}$, c'est la relation de Chasles ;

- Soit O une origine de A, alors $\forall (O,M)\in A^2$, l'application $\begin{matrix}\vec{f}:A^2\to E\\(O,M)\to \vec{OM}\end{matrix}$ est bijective.

Soient A un $K-ea$ et I un intervalle du $K-ea$; soit une application vectorielle $\begin{matrix}M:I\to A\\x\to M(x)\end{matrix}$; $M(x)$ est un point de A dépendant de x.

Si on choisit une origine $O\in A$, l'application $M(x)$ s'identifie à l'application $\begin{matrix}\vec{f}:I\to E\\x\to \vec{f}(x)=\vec{OM}(x)=(M(\vec{x})-O)=\vec{M}(x)\end{matrix}$. Si cette application est dérivable en x_0, cette dérivée se note $\vec{M}'(x)$. Cette définition est indépendante du choix de l'origine O car $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{M(x)-M(x_0)}{x-x_0}$.

Cela est évident, car la dérivée d'une fonction à valeur dans A est un vecteur de E et non un point de A.

2. Dérivées successives

Supposons l'application $\vec{f}$ dérivable en tout point de I, puis supposons que l'application $\begin{matrix}\vec{f}':I\to E\\x\to f'(x)\end{matrix}$ admet à son tour une fonction dérivée $\vec{f}^{(2)}$, etc. Ces dérivées successives se notent $\vec{f}',\vec{f}^{(2)},\vec{f}^{(3)},\dots,\vec{f}^{(n)}$.

Soit un espace vectoriel $E=\mathbb{R}^p$, si $\vec{f}=(f_1,f_2,\dots,f_p)$ est n fois dérivables, alors les composantes associées à $\vec{f}$ sont n fois dérivables et $\vec{f}^{(n)}=(f_1^{(n)},f_2^{(n)},\dots,f_p^{(n)})$.

3. Les règles de calcul

Soient deux applications vectorielles $\vec{f}:I\to E$ et $\vec{g}:I\to E$ dérivables en x_0 alors
$(\vec{f}+\vec{g})'(x_0)=\vec{f}'(x_0)+\vec{g}'(x_0)$
$(\vec{f}.\vec{g})'(x_0)=\vec{f}'(x_0)\vec{g}(x_0)+\vec{f}(x_0)\vec{g}'(x_0)$, c'est la dérivée du produit scalaire $\vec{f}.\vec{g}$.

Si le produit scalaire $\vec{f}(x_0).\vec{f}'(x_0)=0$ alors $\vec{f}(x_0)$ est orthogonale à $\vec{f}'(x_0)$.

$(\vec{f}(x_0)\wedge\vec{g}(x_0))'=\vec{f}'(x_0)\wedge\vec{g}(x_0)+\vec{f}(x_0)\wedge\vec{g}'(x_0)$, c'est la dérivée du produit vectoriel.

Soient deux fonctions $\vec{f}:I\to E$ et $\lambda:I\to\mathbb{R}$ dérivables en x_0 alors
$(\lambda\vec{f})'(x_0)=\lambda'(x_0)\vec{f}(x_0)+\lambda(x_0)\vec{f}'(x_0)$

Soient deux fonctions $u:I\to\mathbb{R}$ et $\vec{f}:J\in\mathbb{R}\to E$ dérivables en x_0 alors
$(\vec{f}\circ u)(x_0)=\vec{f}'(u(x_0))u'(x_0)$

Formule de Young-Taylor

Une fonction f plusieurs fois dérivables au voisinage d'un point peut être approchée par une fonction polynomiale dont les coefficients dépendent uniquement des dérivées de la fonction en ce point. Cette fonction polynomiale est appelée polynôme de Taylor.

Soient I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ ($I \in \mathbb{R}$), E un $\mathbb{R}-evn$ (espace vectoriel normé) et une application vectorielle $\begin{matrix} \vec{f}: I \rightarrow E \\ x \rightarrow \vec{f}(x) \end{matrix}$.

Soit un entier $n \geqslant 0$.
Supposons que $\vec{f}$ admet des dérivées continues jusqu'à l'ordre n sur I .

Soit un point $x_0 \in I$; alors il existe une fonction $\vec{\varepsilon}(h)$ définit sur I telle que $\vec{\varepsilon}(h) \rightarrow \vec{0}$ quand $h \rightarrow 0$, on a :

$$\vec{f}(x_0+h)=\vec{f}(x_0)+\frac{h}{1!}\vec{f}'(x_0)+\frac{h^2}{2!}\vec{f^{(2)}}(x_0)+\ldots+\frac{h^{(n-1)}}{(n-1)!}\vec{f^{(n-1)}}(x_0)+\frac{h^n}{n!}\vec{f^{(n)}}(x_0)+h^n\vec{\varepsilon}(h)$$ avec $\vec{\varepsilon}(h) \rightarrow 0 \;\; quand \;\; h \rightarrow 0$.

La somme s'appelle le polynôme de Taylor de $\vec{f}$ à l'ordre n au point x_0 . Par convention, $0!=1!=1$.

Une autre façon d'écrire un développement de Taylor au point x_0 consiste à poser $x=x_0+h$; on a :

$$\vec{f}(x)=\vec{f}(x_0)+\frac{x-x_0}{1!}\vec{f}'(x_0)+\frac{(x-x_0)^2}{2!}\vec{f^{(2)}}(x_0)+\ldots+\frac{(x-x_0)^{(n-1)}}{(n-1)!}\vec{f^{(n-1)}}(x_0)+\frac{(x-x_0)^n}{n!}\vec{f^{(n)}}(x_0)+(x-x_0)^n\vec{\varepsilon}(x-x_0)$$ avec $\vec{\varepsilon}(x-x_0) \rightarrow 0 \;\; quand \;\; x \rightarrow x_0$.

Si $\vec{f}$ est une fois dérivable au point $x_0 \in I$, on a la formule polynomiale $\vec{f}(x_0+h)=\vec{f}(x_0)+h\vec{f}'(x_0)+h\vec{\varepsilon}(h)$ avec $\vec{\varepsilon}(h) \rightarrow 0 \;\; quand \;\; h \rightarrow 0$.