Les dérivées partielles

Table des matières

Ce document de mathématiques a été rédigé par Didier VERHILLE

1. Dérivées partielles d'ordre 1

1.1. Définition et généralités des dérivées partielles d'ordre 1

Soit $\begin{array}{c} f : K^3 \to \mathbb{R} \\ M=(x,y,z) \to f(x,y,z) \end{array}$ une fonction réelle ou complexe définie dans un intervalle ouvert non vide U de K^3 à valeur dans $\mathbb{R}$.

Soit $M_0=(x_0,y_0,z_0)$ un point dans l'intervalle U .

Pour y_0 et z_0 fixes, la fonction $x \to f(x,y_0,z_0,)$ devient une fonction $g(x)$ d'une seule variable réelle définie au voisinage de $|x-x_0|$ assez petit et dérivable en x_0 , sa dérivée s'appelle la dérivée partielle première de f par rapport à x en $M_0=(x_0,y_0,z_0)$ et se note :

$$\forall x \in K \text{, la dérivée partielle de } f(x,y_0,z_0) \text{ en } M_0 \text{ est } \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0), \text{ avec } y_0 \text{ et } z_0 \text{ fixes}$$

ou encore, c'est la limite quand x tend vers x_0 du rapport ci-dessous

$$g'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x,y_0,z_0)-f(x_0,y_0,z_0)}{x-x_0}\right)=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)$$

De même, on définit les dérivées partielles premières par rapport à y et z en $M_0=(x_0,y_0,z_0)$ notées :

$$\forall y\in K,\ la\ dérivée\ partielle\ de\ f(x_0,y,z_0)\ en\ M_0\ est\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)=\lim_{y\to y_0}\left(\frac{f(x_0,y,z_0)-f(x_0,y_0,z_0)}{y-y_0}\right)$$

$$\forall z\in K,\ la\ dérivée\ partielle\ de\ f(x_0,y_0,z)\ en\ M_0\ est\ \frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)=\lim_{z\to z_0}\left(\frac{f(x_0,y_0,z)-f(x_0,y_0,z_0)}{z-z_0}\right)$$

Si $\frac{\partial f}{\partial x}(M),\ \frac{\partial f}{\partial y}(M),\ \frac{\partial f}{\partial z}(M)$ existent en tous points de l'intervalle U et sont des fonctions continues dans U , on dit que f est continûment dérivable dans U ou de classe C^1 dans U .

Quelques propriétés

Si f et g sont continûment dérivables dans U , alors $f+g,\ fg,\ e^f,\ \sin f,...$ et $\frac{f}{g}\ pour\ g\neq 0$ sont continûment dérivables dans U .

L'existence de dérivées partielles en un point d'une fonction de plusieurs variables n'entraîne pas la continuité en ce point. En revanche, pour une fonction réelle d'une seule variable, dérivable en un point et continue en ce point, on sait que l'existence de la dérivée en un point entraîne la continuité en ce point.

Deux exemples

Les dérivées partielles de la fonction $\begin{array}{c} f:\mathbb{R}_+^{2,*}\to\mathbb{R} \\ (x,y)\to f(x,y)=x^y \end{array}$ pour $x>0$ sont :

$$\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=y\,x^{y-1}\quad \text{et}\quad \forall y\in\mathbb{R},\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=x^y\ln(x)$$

Les dérivées partielles de la fonction $\begin{array}{c} f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R} \\ (x,y)\to f(x,y)=x\,e^{x^2+y^2} \end{array}$ sont :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=(2x^2+1)\,e^{x^2+y^2}\quad \text{et}\quad \forall y\in\mathbb{R},\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=(2xy)\,e^{x^2+y^2}$$

1.2. Dérivées d'une fonction composée

Un petit rappel sur les dérivées de fonction d'une seule variable

Soit $\begin{array}{c} f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ x\to f(x)\to g(f(x)) \end{array}$, si f est continûment dérivable en x_0 et g est continûment dérivable en $f(x_0)$ alors $g\circ f,\ f^\alpha,\ e^f$ sont continûment dérivables en x_0 .

La dérivée d'une fonction composée s'écrit $(g\circ f)'(x_0)=f'(x_0)g'(f(x_0))$
La dérivée d'une fonction puissance s'écrit $(f^\alpha)'(x_0)=\alpha(f^{\alpha-1})(x_0)f'(x_0),\ \forall\alpha\in\mathbb{R}$
La dérivée d'une fonction exponentielle s'écrit $(e^f)'(x_0)=e^{f(x_0)}f'(x_0)$

Si $f(x)=x$ alors, $(a^{f(x)})'=a^{f(x)}\ln(a)$ où $a\in\mathbb{R}_+^*$
Si $f(x)=u(x)$ et u est une application dérivable, $(a^{f(x)})'=a^{f(x)}\ln(a)u'(x)$ où $a\in\mathbb{R}_+^*$

Théorème

Soit $\begin{array}{c} f:U\to\mathbb{R} \\ (x,y)\to f(x,y) \end{array}$ une fonction continûment dérivable dans un intervalle ouvert U de $\mathbb{R}^2$.

Soit $x=u(t)$ et $y=v(t)$ deux fonctions continûment dérivables dans un intervalle I de $\mathbb{R}$ tel que $(u(t),v(t))\in U$ pour $t\in I$.

Alors, la fonction composée $F:t\to F(t)=f(u(t),v(t))$ est continûment dérivable dans I et de dérivée $F'(t)=\frac{\partial f}{\partial x}(u(t),v(t)).\frac{du}{dt}(t)+\frac{\partial f}{\partial y}(u(t),v(t)).\frac{dv}{dt}(t)$

1.3. Quelques théorèmes généraux

Soient $f(x_1,x_2,x_3)$ et $g(x_1,x_2,x_3)$ deux fonctions continûment dérivables et définies sur un ouvert U non nul à valeurs dans $\mathbb{R}$.

$\forall i\in\{1,2,3\}$, si f et g admettent une dérivée partielle d'ordre 1 en M_0 en x_i alors $\forall(\lambda,\mu)\in K^2$

$$\frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial x_i}(M_0)=\lambda\frac{\partial(f)}{\partial(x_i)}(M_0)+\mu\frac{\partial(g)}{\partial(x_i)}(M_0)$$

De même,

$$\frac{\partial(fg)}{\partial x_i}(M_0)=\frac{\partial(f)}{\partial(x_i)}(M_0).g(M_0)+f(M_0).\frac{\partial(g)}{\partial(x_i)}(M_0)$$

$$\frac{\partial(\frac{f}{g})}{\partial x_i}(M_0)=\frac{\frac{\partial(f)}{\partial(x_i)}(M_0).g(M_0)-f(M_0).\frac{\partial(g)}{\partial(x_i)}(M_0)}{g^2(M_0)}$$

2. Dérivées partielles d'ordre 2

2.1. Définition et généralités des dérivées partielles d'ordre 2

Nous allons maintenant dériver les dérivées partielles d'ordre 1 d'une fonction f .

Soit $\begin{array}{c} f:K^3\to\mathbb{R} \\ M=(x,y,z)\to f(x,y,z) \end{array}$ une fonction réelle ou complexe définie dans un intervalle ouvert non vide U de K^3 à valeur dans $\mathbb{R}$.

Supposons les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}(M),\ \frac{\partial f}{\partial y}(M),\ \frac{\partial f}{\partial z}(M)$ définies et continues dans U .

Si les dérivées partielles d'ordre 1 $\frac{\partial f}{\partial x}(M),\ \frac{\partial f}{\partial y}(M),\ \frac{\partial f}{\partial z}(M)$ sont dérivables en x , ces dérivées partielles secondes se notent $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(M),\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(M),\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}(M)$.

De même, les dérivées partielles d'ordre 2 en y et en z se notent :

$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(M)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(M)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(M)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(M)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(M)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(M)$

Exemple

Reprenons les dérivées partielles d'ordre 1 de la fonction $\begin{array}{c} f: \mathbb{R}_+^{*2} \to \mathbb{R} \\ (x,y) \to f(x,y) = x^y \end{array}$ pour $x>0$. Ces deux dérivées $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y\,x^{y-1}$ et $\forall y \in \mathbb{R},\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^y \ln(x)$ ont été définies précédemment.

Les dérivées d'ordre 2 de ces deux dérivées d'ordre 1 sont :

En x , $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(M) = y(y-1)x^{y-2},\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(M) = x^{y-1} + yx^{y-1}\ln(x)$

En y , $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(M) = yx^{y-1}\ln(x) + x^y \frac{1}{x},\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(M) = x^y(\ln(x))^2$

On constate que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(M) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(M)$ sont égales.

Théorème

Soit $\begin{array}{c} f: U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \to f(x,y) \end{array}$ une fonction définie et admettant des dérivées partielles premières et secondes continues dans une partie non vide U de $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ alors $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(M) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(M)$

Ce théorème est encore appelé le théorème de Schwarz. Mais, ce théorème tombe en défaut lorsque les hypothèses ne sont pas vérifiées.

Voici un contre-exemple

La fonction $f(x,y)$ est définie sur le domaine $U = \mathbb{R}^2 / \{0,0\}$ à valeur dans $\mathbb{R}$ et $(0,0)$ est adhérent au domaine U .

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & si\ \ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ \ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

La fonction $f(x,y)$ a une limite en $(0,0)$ et cette limite est égale à 0 . Finalement $f(x,y)$ est définie sur $\mathbb{R}^2$.

La fonction $f(x,y)$ est continue sur le domaine $\mathbb{R}^2 / \{0,0\}$ et en $(0,0)$. Finalement $f(x,y)$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

La fonction $f(x,y)$ admet sur $\mathbb{R}^2$ des dérivées partielles d'ordre 1 par rapport à chacune des deux variables x et y , alors :

$$(1)\ \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \frac{y(x^4+4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2} & si\ \ (x,y) \neq 0 \\ 0 & si\ \ (x,y) = 0 \end{cases}$$

et

$$(2)\ \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x(x^4-4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2} & si\ (x,y)\neq 0\\ 0\ si\ (x,y)=0\end{cases}$$

En dérivant une seconde fois (1) par y et (2) par x , on obtient les dérivées partielles d'ordre 2. Au point $(x,y)=(0,0)$, nous avons les valeurs suivantes :

$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)=1$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)=-1$

On constate que la fonction $f(x,y)$ ne possède pas de dérivées secondes au point $(0,0)$. Ainsi, dans ce cas de figure, le théorème de Schwarz n'est pas vérifié pour cette fonction.

Généralisation du théorème de Schwarz

Soit $(x_0,x_1,\dots,x_n)\rightarrow f(x_0,x_1,\dots,x_n)$ une fonction définie et admettant des dérivées partielles premières et secondes continues dans une partie non vide U de $\mathbb{R}^n$ alors $\forall(i,j)\in\{0,1,\dots,n\},\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(M)=\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}(M)$

3. Dérivées partielles successives

Par récurrence, on peut définir les dérivées partielles d'ordre 3, d'ordre 4, …, d'ordre n d'une fonction de classe C^n .

Soit $\begin{matrix} f:K^3\rightarrow\mathbb{R}\\ M=(x,y,z)\rightarrow f(x,y,z)\end{matrix}$ une fonction réelle ou complexe définie dans un intervalle ouvert non vide U de K^3 à valeur dans $\mathbb{R}$.

Supposons que les dérivées partielles de $f(x,y,z)$ d'ordre 2 sont définies et de classe C^3 dans U . On peut ainsi définir toutes les dérivées partielles d'ordre 3 de $f(x,y,z)$.

Par exemple, les dérivées partielles d'ordre 3 en x,y,z de la fonction $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(M)$ continûment dérivable se notent $\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(M),\frac{\partial^3 f}{\partial y\partial x^2}(M),\frac{\partial^3 f}{\partial z\partial x^2}(M)$.

Théorème

Soit $\begin{matrix} f:U\subset\mathbb{R}^2\rightarrow\mathbb{R}\\ (x,y)\rightarrow f(x,y)\end{matrix}$ une fonction définie, de classe C^3 et admettant des dérivées partielles continues d'ordre 1, d'ordre 2 et d'ordre 3 dans une partie non vide U de $\mathbb{R}^2$ alors, d'après le théorème de Schwarz, on peut écrire les égalités suivantes :

$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}(M)=\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y\partial x}(M)=\frac{\partial^3 f}{\partial y\partial x^2}(M)$ et $\frac{\partial^3 f}{\partial y^2\partial x}(M)=\frac{\partial^3 f}{\partial y\partial x\partial y}(M)=\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}(M)$

4. Champ scalaire et gradient

4.1. Définition d'un champ scalaire

Un champ de scalaire est une fonction de plusieurs variables qui associe un seul nombre (appelé un scalaire) à chaque point de l'espace. Un scalaire désigne toujours un nombre.

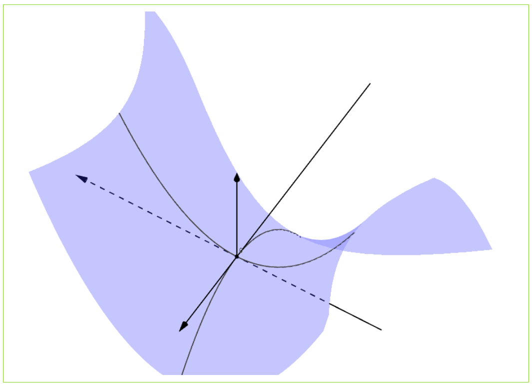
Le champ scalaire est de la forme $\begin{array}{c} f:\mathbb{R}^n \to K \\ (x_0,x_1,\dots,x_n) \to f(x_0,x_1,\dots,x_n) \end{array}$ où $\vec{u}=(x_0,x_1,\dots,x_n)$ est un vecteur de $\mathbb{R}^n$

Le champ scalaire peut être vu comme un espace à n dimensions avec un nombre complexe ou réel attaché à chaque point de l'espace.

La dérivée d'un champ scalaire résulte en un champ vectoriel appelé le gradient qui associe un vecteur à chaque point de l'espace.

On utilise par exemple des champs scalaire en météorologie lorsqu'on veut décrire les valeurs de pression ou de température sur une certaine zone géographique : on parle alors de champs de température et de champs de pression.

Exemple de champ scalaire



Soit le champ scalaire $\begin{array}{c} f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \to f(x,y)=x^2-y^2 \end{array}$.

Et soit $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2x \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=-2y$ ses dérivées partielles d'ordre 1.

Le point central $O(0,0)$ est un point critique de la fonction, point où le gradient s'annule. Il s'agit ici en particulier d'un point-selle : il représente un maximum selon une direction et un minimum selon l'autre direction.

4.2. Définition du gradient

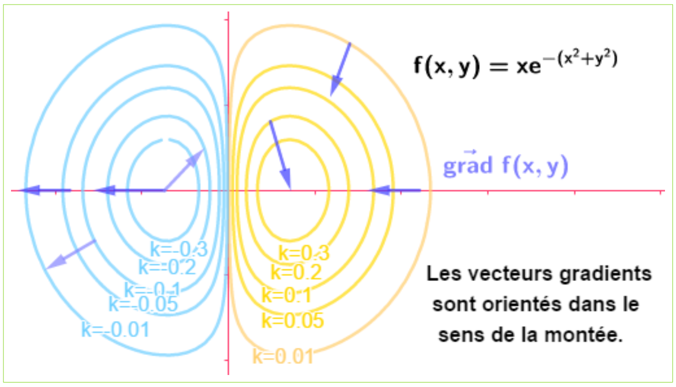
Pour les mathématiciens, le terme de gradient désigne un vecteur représentant la variation d'une fonction $f(x,y,z)$ par rapport à la variation de ses différents paramètres (x,y,z) . Ainsi le gradient d'une fonction $f(x,y,z)$ en un point $M(x,y,z)$ est le vecteur dont les composantes du vecteur sont les dérivées partielles de $f(x,y,z)$ calculées au point $M(x,y,z)$.

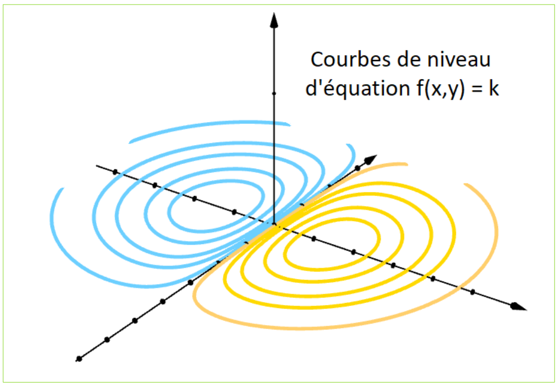
Le dictionnaire définit le gradient comme « le taux de variation d'un élément météorologique (température, pression,...) en fonction de la distance ».

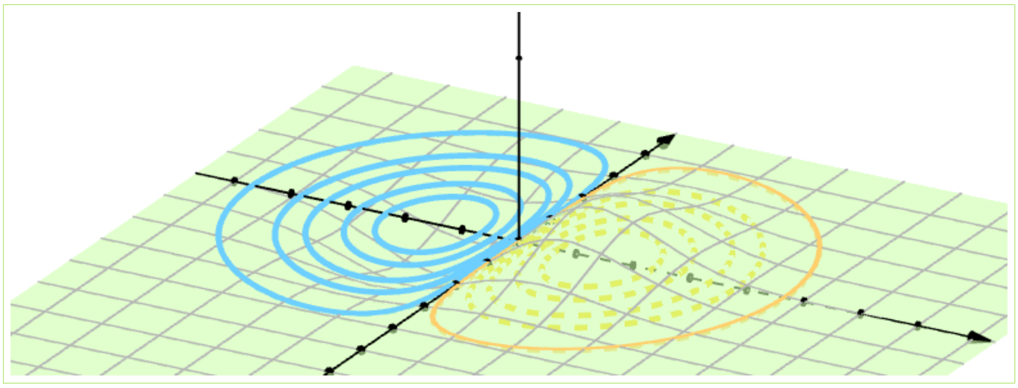
Par exemple, imaginons que le champ scalaire est un champ de scalaires réels, et qu'il représente la hauteur d'un terrain en chaque point. La hauteur est représentée par les courbes de niveau $f(x,y,z)=k$. On veut savoir dans quelle direction aller pour monter : l'opérateur gradient donne cette information.

Dans notre exemple, il s'agit d'un champ scalaire de dimension deux. Considérons indépendamment chaque direction. On peut dériver notre champ par rapport à x : si le champ est localement décroissant, le gradient sera négatif, s'il est croissant, le gradient sera positif. Ainsi, un vecteur pointera dans la direction vers laquelle le champ croît. Il en est de même par rapport à y . Ainsi, le vecteur gradient donne la direction pour monter.

Pour illustrer cet exemple, voici le tracé des courbes de niveau d'équation $f(x,y)=k$ d'un champ scalaire de dimension deux de la fonction $f(x,y)=x\,e^{-(x^2+y^2)}$







Le vecteur gradient de coordonnées $\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\vec{j}$ *où* $\vec{i}=(1,0)$ *et* $\vec{j}=(0,1)$ dans la base orthonormée $(\vec{i},\vec{j})$ indique la direction vers laquelle le champ f est croissant.

Définition du gradient

Soit $f:U\subset\mathbb{R}^3\rightarrow\mathbb{R}$ un champ scalaire de deux variables définie dans un ouvert U et de classe C^1 . On lui associe un champ de vecteurs appelé champ de gradient et noté $\vec{grad}(f)$ ou $\vec{\nabla}f$ dans la base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ tel que :

$$\vec{\nabla}f(x,y,z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z),\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z),\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)\right) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)\vec{i}+\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)\vec{j}+\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)\vec{k}$$

avec $\vec{i}=(1,0,0),\ \vec{j}=(0,1,0),\ \vec{k}=(0,0,1)$

La direction du vecteur gradient indique la pente de plus grande inclinaison. On peut dire aussi qu'elle pointe vers les zones de valeurs plus grandes.

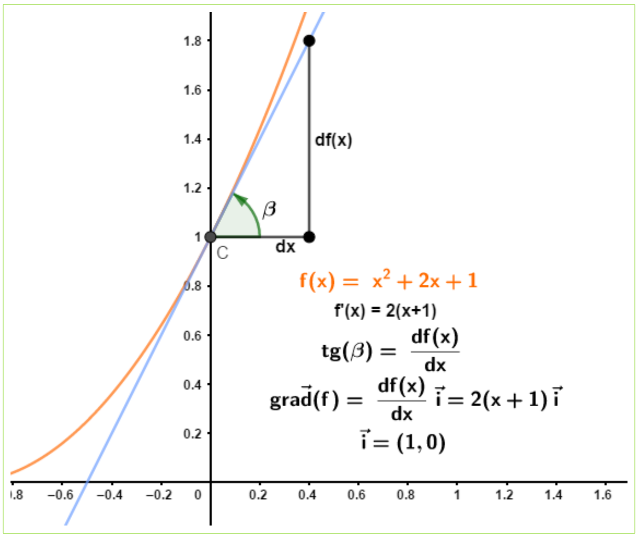
La norme du vecteur gradient est proportionnelle à la variation de la pente : plus celle-ci est forte, plus le vecteur est long.

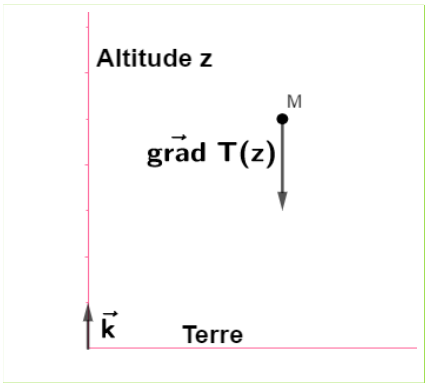
Le gradient est orthogonal aux vecteurs tangents tracées sur les courbes de niveau d'équation $f(x,y,z)=k,\ k\in\mathbb{R}$.

Interprétation du gradient

Pour illustrer ce que représente le gradient en un point $C(x)$, nous allons examiner le cas simple d'un champ scalaire $f(x)$ à une dimension.

Avec une dimension, le vecteur $\vec{U}=\vec{grad}\,f(x)=\nabla\vec{f}(x)=\frac{\partial f}{\partial x}(x)\,\vec{i}$ d'un champ scalaire $f(x)$ en un point $C(x)$ définit la pente (tangente) de ce champ $f(x)$ en ce point.





Exemple 1 :

Soit la fonction $f(x)=x^2+2+1$, $\frac{df(x)}{dx}$ est la dérivée de la fonction $f(x)$. Au point $C(0)$, $\frac{df(C)}{dx}=2$ et représente la pente de la tangente à la courbe $f(x)$ au point $C(0)$. Elle représente la variation infinitésimale de cette fonction par rapport à un déplacement infinitésimal en ce point.

Exemple 2 :

Considérons l'atmosphère terrestre où la température en un point d'altitude z varie selon l'équation $T(z)=T(0)-az\ \ (a>0)$

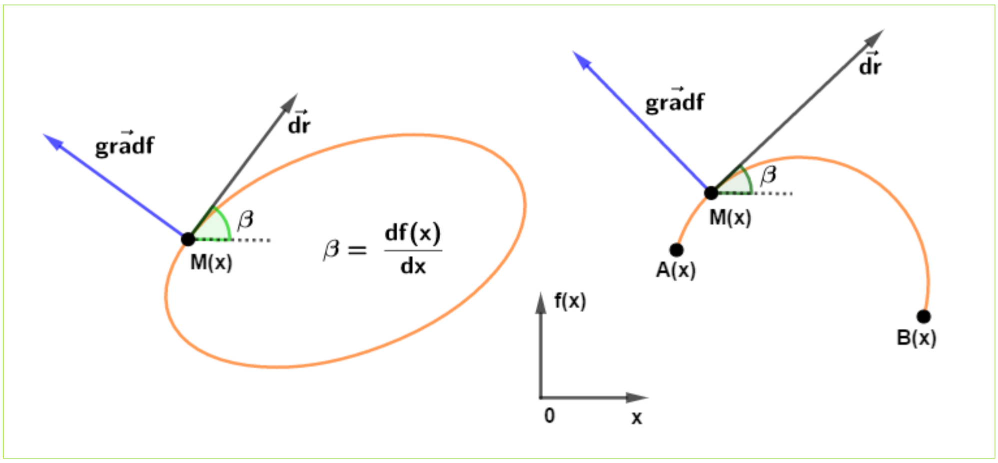
On a ainsi $\vec{grad}\,T(z)=\frac{\partial T}{\partial z}(z)\vec{k}=-a\,\vec{k}$. C'est un vecteur qui indique la direction et le sens de croissance de la température.

Généralisation

On considère un chemin infiniment petit $dr=dx\,\vec{i}+dy\,\vec{j}+dz\,\vec{k}$ dans un espace à trois dimension doté d'un champ scalaire $f(x,y,z)$. La circulation du vecteur $\vec{grad}\,f$ le long de ce chemin est égal au produit scalaire $\vec{grad}\,f.\vec{dr}=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz=df$.

La circulation du vecteur gradient de f entre deux points A et B d'un chemin quelconque (AB) est égale à $\int_A^B \vec{grad}\,f.\vec{dr}=\int_A^B df=f(B)-f(A)$. Elle ne dépend pas de la courbe, mais du point de départ A et d'arrivé B.

La circulation du vecteur gradient sur une courbe fermée est nulle.



Sur une surface de niveau, la fonction $f(x,y,z)$ est constante. Ainsi, pour tout déplacement élémentaire sur cette surface, la variation de $f(x,y,z)$ est nulle. On a toujours $df = \overrightarrow{grad} f(M) . d\vec{M} = 0$. Le vecteur $\overrightarrow{grad} f$ est normal aux surfaces de niveau. Lorsque l'on passe d'une surface de niveau à une surface voisine correspondant à une plus grande valeur de $f(x,y,z)$ ($df > 0$), la relation $df = \overrightarrow{grad} f(M) . d\vec{M} = 0$ montre que $\overrightarrow{grad} f$ est dirigé selon les valeurs croissantes de $f(x,y,z)$.

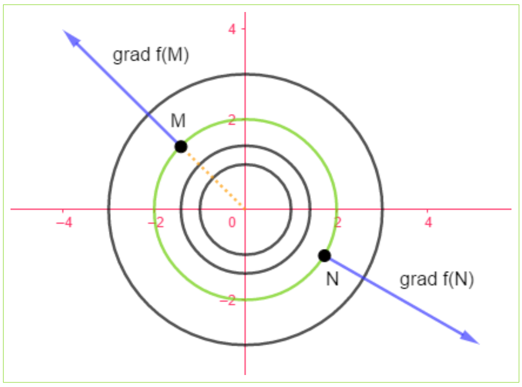
Propriétés du gradient

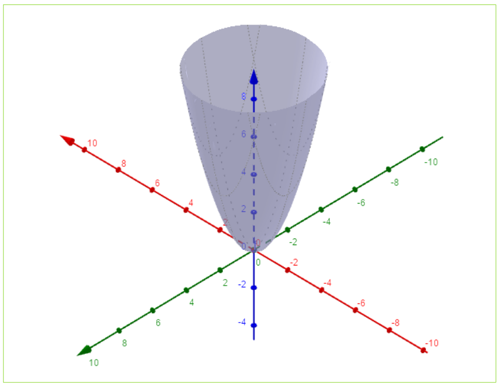
Le gradient est un opérateur linéaire.
Pour tous champs scalaires f et g, $\forall (\lambda,\mu) \in K,\ \overrightarrow{grad}(\lambda f + \mu g) = \lambda \overrightarrow{grad} f + \mu \overrightarrow{grad}\, g$.

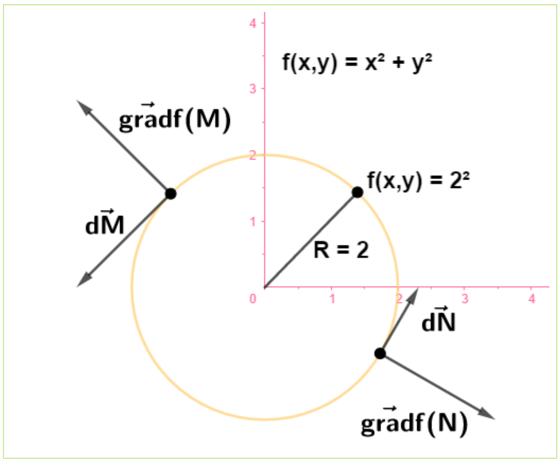
En particulier, si le champ scalaire f dépend du temps, la relation suivante est vraie $\frac{\partial}{\partial t} \overrightarrow{grad} f = \overrightarrow{grad} \frac{\partial}{\partial t} f$.

Par définition, le scalaire $df = \overrightarrow{grad} f(M) . d\vec{M}$ ne dépend pas de la base utilisée.

Exemple







Soit la fonction scalaire $f(x,y)=x^2+y^2$ dont les courbes de niveau d'équation $f(x,y)=k,\ k\in\mathbb{R}$ sont représentées sur le dessin ci-dessus.

La constante k de la courbe de niveau de $f(x,y)$ passant par le point $M(-\sqrt{2},\sqrt{2})$ est $f(x,y)=f(M)=4$. La courbe de niveau a pour équation $x^2+y^2=4=2^2$. C'est un cercle de rayon 2 centré à l'origine.

Ses dérivées partielles sont $\frac{\partial f}{\partial x}=2x\ \ et\ \ \frac{\partial f}{\partial y}=2x$.

Dans la base $(\vec{i},\vec{j})$, le vecteur gradient et le vecteur tangent au point $M(-\sqrt{2},\sqrt{2})$ sont :
$\vec{grad} f(M)=-2\sqrt{2}\,\vec{i}+2\sqrt{2}\,\vec{j}=2(-\sqrt{2}\,\vec{i}+\sqrt{2}\,\vec{j})=2\vec{OM}$ et $d\vec{M}=-\sqrt{2}\,\vec{i}-\sqrt{2}\,\vec{j}$.
On constate que $df=\vec{grad} f(M).d\vec{M}=0$

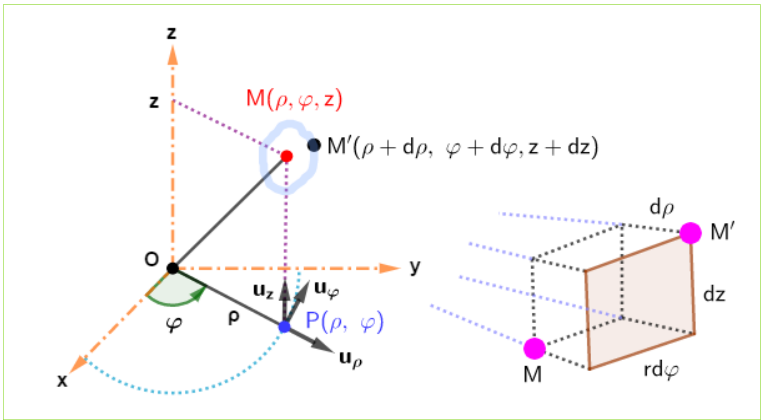
On remarque que le vecteur gradient est perpendiculaire à la tangente sur la courbe de niveau en M ($df=\vec{grad} f.d\vec{M}=0$) et est dirigé dans le sens des niveaux croissants.

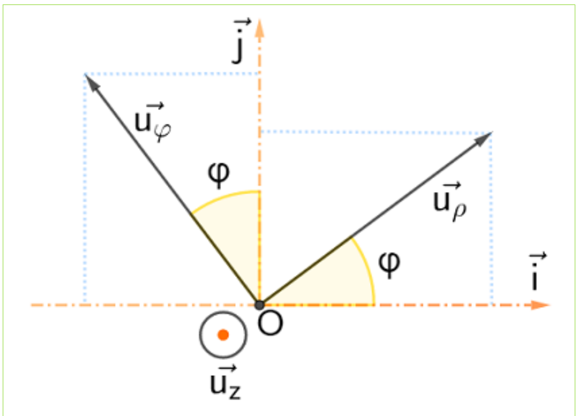
La constante k de la courbe de niveau de $f(x,y)$ passant par le point $M(\sqrt{3},-1)$ est $f(x,y)=f(M)=4$. La courbe de niveau a pour équation $x^2+y^2=4=2^2$. C'est le même cercle de rayon 2 centré à l'origine.

Dans la base $(\vec{i},\vec{j})$, le vecteur gradient et le vecteur tangent au point $M(\sqrt{3},-1)$ sont :
$\vec{grad} f(M)=2\sqrt{3}\,\vec{i}-2\vec{j}=2(\sqrt{3}\,\vec{i}-\vec{j})=2\vec{ON}$ et $d\vec{N}=\vec{i}+\sqrt{3}\,\vec{j}$
On constate que $df=\vec{grad} f(M).d\vec{N}=0$

On remarque que le vecteur gradient est perpendiculaire à la tangente sur la courbe de niveau en M ($df=\vec{grad} f(M).d\vec{M}=0$) et est dirigé dans le sens des niveaux croissants.

4.3. Gradient d'un scalaire en coordonnées cylindriques





Pour obtenir le système de coordonnées cylindriques, il suffit de compléter le système de coordonnées polaires dans le plan xOy par un troisième axe : l'axe Oz avec sa coordonnée cartésienne. Les coordonnées cylindriques (ρ,φ,z) sont généralement dénommées rayon, azimut et cote.

La base orthonormée des coordonnées cartésiennes est nommée $(\vec{i},\vec{j},\vec{u_z})$.
La base orthonormée des coordonnées cylindriques est nommée $(\vec{u_\rho},\vec{u_\varphi},\vec{u_z})$.
La relation entre les deux bases est résumée par le tableau ci-dessous :

Bases	$\vec{i}$	$\vec{j}$	$\vec{u}_z$
$\vec{u}_\rho$	$\cos(\varphi)$	$\sin(\varphi)$	0
$\vec{u}_\varphi$	$-\sin(\varphi)$	$\cos(\varphi)$	0
$\vec{u}_z$	0	0	1

Le point M dans la base orthonormée des coordonnées cartésiennes s'écrit $\vec{OM}=x\,\vec{i}+y\,\vec{j}+z\,\vec{u}_z=\rho\cos(\varphi)\vec{i}+\rho\sin(\varphi)\vec{j}+z\,\vec{u}_z$.

Le point M dans la base orthonormée des coordonnées cylindriques s'écrit $\vec{OM}=\rho\,\vec{u}_\rho+z\,\vec{u}_z=\rho(\cos(\varphi)\vec{i}+\sin(\varphi)\vec{j})+z\,\vec{u}_z=\rho\cos(\varphi)\vec{i}+\rho\sin(\varphi)\vec{j}+z\,\vec{u}_z$.

D'où,

$$\begin{matrix} x=\rho\cos(\varphi) \\ y=\rho\sin(\varphi) \\ z=z \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} \rho=\sqrt{x^2+y^2} \rightarrow Rayon \\ \varphi=Arctg(\frac{y}{x}) \rightarrow Azimut \\ z=z \rightarrow Cote \end{matrix}$$

Le point M dans l'espace est repéré par le triplé de réels (ρ,φ,z) dans les deux bases.

On suppose que le point $M(\rho,\varphi,z)$ subit un déplacement élémentaire pour se retrouver en $M'(\rho+d\rho,\varphi+\rho\,d\varphi,z+dz)$.

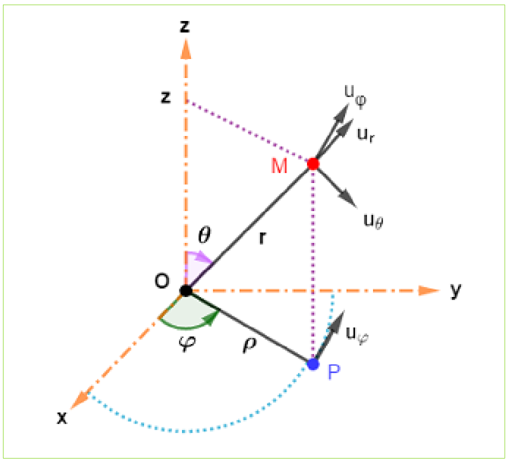
Ce déplacement élémentaire dans la base locale $(\vec{u}_\rho,\vec{u}_\varphi,\vec{u}_z)$ est représenté par le vecteur $\vec{MM'}=d\vec{OM}$ d'où $d\vec{OM}=d\rho\,\vec{u}_\rho+\rho\,d\theta\,\vec{u}_\varphi+dz\,\vec{u}_z$.

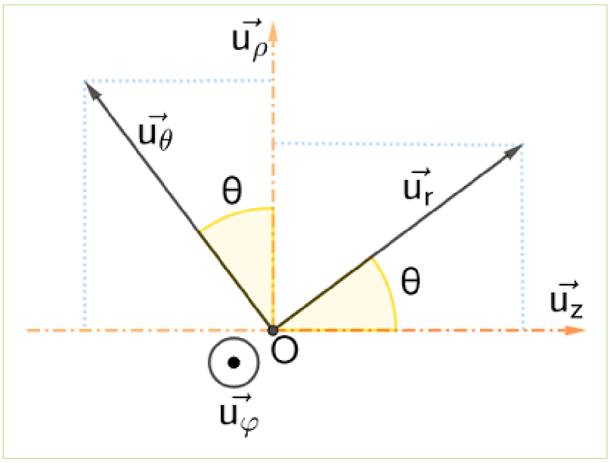
La variation élémentaire correspondante de $f(\rho,\varphi,z)$ est : $df(\rho,\varphi,z)=\frac{\partial f}{\partial\rho}(\rho,\varphi,z)+\frac{\partial f}{\partial\varphi}(\rho,\varphi,z)+\frac{\partial f}{\partial z}(\rho,\varphi,z)$

En identifiant ces deux égalités avec la propriété $df(M)=\vec{grad}\,f(M).d\vec{M}$ dans la base locale $(\vec{u}_\rho,\vec{u}_\varphi,\vec{u}_z)$, on obtient le gradient en coordonnées cylindriques de la fonction $f(\rho,\varphi,z)$:

$$\nabla f(\rho,\varphi,z)=\frac{\partial f}{\partial\rho}\vec{u}_\rho+\frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial\varphi}\vec{u}_\varphi+\frac{\partial f}{\partial z}\vec{u}_z$$

4.4. Gradient d'un scalaire en coordonnées sphérique





La base orthonormée des coordonnées cartésiennes est nommée $(\vec{i},\vec{j},\vec{u}_z)$.

La base orthonormée des coordonnées cylindriques est nommée $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\varphi, \vec{u}_z)$.
La base orthonormée des coordonnées sphériques est nommée $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$.

La relation entre les bases cartésiennes et shériques sont résumées par les tableaux ci-dessous :

Bases	$\vec{u}_r$	$\vec{u}_\theta$	$\vec{u}_\varphi$
$\vec{u}_\rho$	$\sin(\theta)$	$\cos(\theta)$	0
$\vec{u}_\varphi$	0	0	1
$\vec{u}_z$	$\cos(\theta)$	$-\sin(\theta)$	0

Bases	$\vec{i}$	$\vec{j}$	$\vec{u}_z$
$\vec{u}_r$	$\cos(\varphi)$	$\sin(\varphi)$	0
$\vec{u}_\varphi$	$-\sin(\varphi)$	$\cos(\varphi)$	0
$\vec{u}_z$	0	0	1

Bases	$\vec{i}$	$\vec{j}$	$\vec{u}_z$
$\vec{u}_r$	$\sin(\theta)\cos(\varphi)$	$\sin(\theta)\sin(\varphi)$	$\cos(\theta)$
$\vec{u}_\theta$	$\cos(\theta)\cos(\varphi)$	$\cos(\theta)\sin(\varphi)$	$-\sin(\theta)$
$\vec{u}_\varphi$	$-\sin(\varphi)$	$\cos(\varphi)$	0

Le point M dans la base orthonormée des coordonnées cartésiennes s'écrit $\vec{OM} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\vec{u}_z$.

Le point M dans la base orthonormée des coordonnées cylindriques s'écrit $\vec{OM} = \rho\,\vec{u}_\rho + z\vec{u}_z$.

Le point M dans la base orthonormée des coordonnées cartésiennes s'écrit $\vec{OM} = r\vec{u}_r$.

On suppose que le point $M(r, \theta, \varphi)$ subit un déplacement élémentaire pour se retrouver en $M'(r+dr, \theta + r\,d\theta, \varphi + r\sin\theta\,d\varphi)$.

Ce déplacement élémentaire dans la base locale $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$ est représenté par le vecteur $\vec{MM'} = d\vec{OM}$ d'où $d\vec{OM} = dr\,\vec{u}_r + r\,d\theta\,\vec{u}_\theta + r\sin\theta\,d\varphi\,\vec{u}_\varphi$.

En conduisant le même raisonnement que pour les coordonnées cylindriques, nous en déduisons que dans la base locale $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$, le gradient en coordonnées sphériques de la fonction $f(r, \theta, \varphi)$ est :

$$\nabla f(r, \theta, \varphi) = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{u}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\vec{u}_\varphi$$