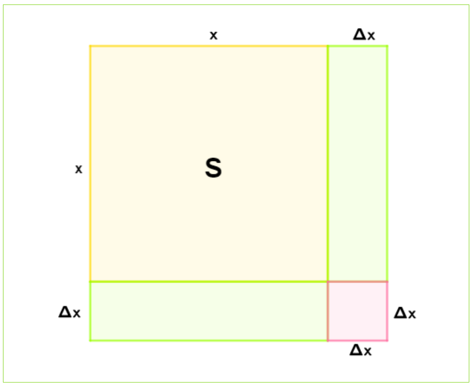
Les différentielles

Table des matières

Ce document de mathématiques a été rédigé par Didier VERHILLE.

La notion de différentielle, fondamentale en sciences, est plus difficile à assimiler que les dérivées partielles, mais elle est plus naturelle.



Pour illustrer la notion de différentielle, supposons une surface carrée S de côtés x . Quelle est la variation de la surface $s(x)=x^2$ d’un carré quand son côté augmente de Δx ?

La surface du carré de côtés x étant $S(x)=x^2$, à l'accroissement Δx de la variable x va correspondre un accroissement ΔS de la fonction $S(x)$ d'où :
Si $x \rightarrow x+\Delta x$, alors $S \rightarrow S+\Delta S=(x+\Delta x)^2$

$$\Rightarrow \ \Delta S \ = \ (x+\Delta x)^2-x^2 \ = \ x^2+2x\Delta x+(\Delta x)^2-x^2 \ = \ 2x\Delta x+(\Delta x)^2$$

La différentielle $dS(x)$ de la surface est $dS(x) \ = \ 2x\Delta x$

Nous avons $\Delta S-dS \ = \ (\Delta x)^2 \rightarrow 0 \ \ quand \ \ \Delta x \rightarrow 0$, géométriquement, cette différence représente l’aire du carré de côté Δx .

1 Différentielle d'une fonction en un point

Rappelons que les formes linéaires sur un ouvert U de $\mathbb{R}^3$ sont des applications $\begin{matrix} L : U \to \mathbb{R} \\ (u_1, u_2, u_3) \to L(u_1, u_2, u_3) \end{matrix}$ telles que $L(u_1, u_2, u_3) = a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3$ où a_1, a_2, a_3 sont des constantes réelles.

On dit que $\begin{matrix} f : U \to \mathbb{R} \\ (x, y, z) \to f(x, y, z) \end{matrix}$ une fonction réelle continûment dérivable dans une partie ouverte U de $\mathbb{R}^3$ est différentiable en $M = (x_{0,} y_{0,} z_0) \in U$, s'il existe une application linéaire continue $L : U \to \mathbb{R}$ et une application $\varepsilon : U \to \mathbb{R}$ telles que

- $\forall (x, y, z) \in U,\ f(x, y, z) = f(M) + L(x - x_0, y - y_0, y - y_0) + (|x - x_0| + |y - y_0| + |z - z_0|)\, \varepsilon(x - x_0, y - y_0, y - y_0)$
- $\lim\limits_{(x, y, z) \to M} \varepsilon(x - x_0, y - y_0, y - y_0) = 0$

Si une telle application L existe alors elle est unique. On appelle L la différentielle de f au point M , et on la note $df(M)$.

La forme linéaires de la différentielle se note :

$$df(M) : (u_1, u_2, u_3) \ \to \ L(u_1, u_2, u_3) \ = \ \frac{\partial f}{\partial x}(M) u_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(M) u_2 + \frac{\partial f}{\partial z}(M) u_3 \ = \ (df(M))(u_1, u_2, u_3)$$

Exemple

Soit la fonction $f(x, y, z) = x^2 + 2xy + yz$ continûment dérivable dans $\mathbb{R}^3$ tout entier.

$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = 2x + 2y$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = 2x + z$, $\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = y$

Si $M = (x, y, z) = (1,3,2)$ alors $\frac{\partial f}{\partial x}(M) = 8$, $\frac{\partial f}{\partial y}(M) = 4$, $\frac{\partial f}{\partial z}(M) = 3$

Ainsi, la différentielle au point $M(1,3,2)$ est $(df(M))(u_1, u_2, u_3) = 8u_1 + 4u_2 + 3u_3$

Cas général

Soit le point $M = (x_{0,} y_{0,} z_0) \in U$ et posons $x = x_0 + h,\ \ y = y_0 + k,\ \ z = z_0 + l$

Géométriquement, pour de petites variations h, k, l du point M de coordonnées $M = (x_{0,} y_{0,} z_0) \in U$, on a

$$f(x_0 + h, y_0 + k, z_0 + l) - f(M) = (df(M)(h, k, l)) + (|h| + |k| + |l|)\, o(1) \ \ quand \ \ \lim_{(h, k, l) \to (0,0,0)} (h, k, l) = 0$$

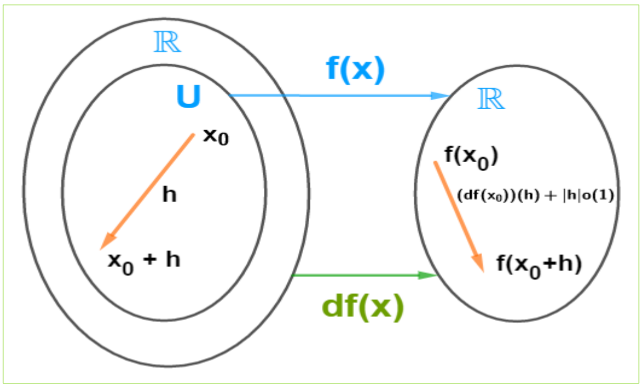
$o(1)$ est la notation Landau qui signifie une quantité tendant vers 0. C'est un terme d'erreur souvent noté pour une variable $o(h)$ ou $\varepsilon(h)$. La fonction $h \to \varepsilon(h)$ a pour limite 0 quand h tend vers 0.

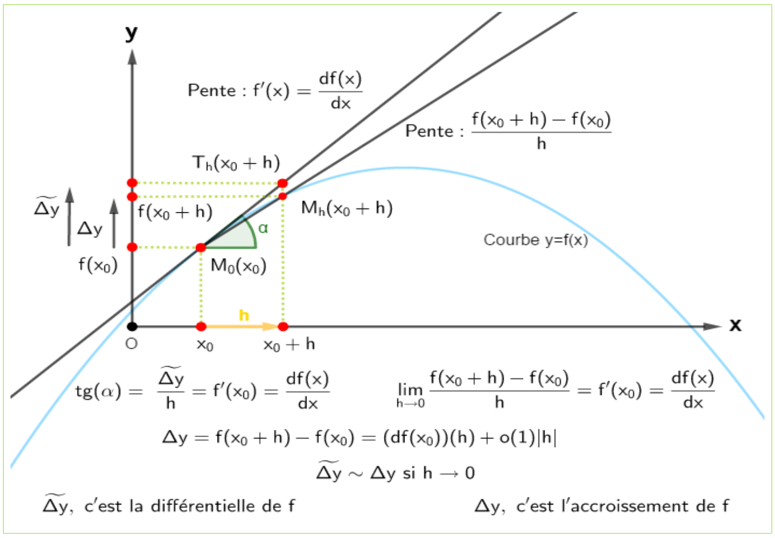
Autrement dit, l'accroissement de la fonction f , pour de petits accroissements de h, k, l du point M de coordonnées $M = (x_{0,} y_{0,} z_0) \in U$, est égale en première approximation à la valeur de la différentielle pour les petits accroissements (h, k, l) .

Ainsi, les différentielles permettent de calculer rapidement de petits accroissements avec une bonne approximation.

Tout ce qui précède s'étend facilement aux fonctions d'un nombre quelconque de variables.

Différentielle dans le cas d'une fonction d'une variable





Soit $\begin{array}{l} f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ x\to f(x)\end{array}$ une fonction réelle continûment dérivable dans une partie ouverte U de $\mathbb{R}$ et x_0 un point de U , alors $f(x_0+h)-f(x_0)=(df(x_0))(h)+|h|o(1)$.

Le symbole $o(1)$ signifie une quantité tendant vers 0.

En particulier, pour une fonction d'une seule variable, on a l'écriture $df(x)=f'(x)dx$ d'où la notation $\dfrac{df(x)}{dx}$ adoptée pour les dérivées d'une seule variable. Mais, si $f(x,y)$ est une fonction de deux variables en x et y , l'écriture de $\dfrac{df(x)}{dx}$ n'est plus valable, c'est pourquoi on introduit les symboles $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

Définition des notations Landau

$f \underset{\alpha}{=} o(g)$: on dit que f est négligeable devant g ou que f est un $o(g)$ au voisinage d'un réel α si, au voisinage de α, le quotient $\dfrac{f}{g}$ admet la limite 0 en ce point et on écrit $f(x) = o(g(x)) \text{ ou } f\in o(g)$.

Une notation comme $o(1)$ signifie une quantité tendant vers 0 .

$f\sim g$: on dit que deux fonctions f et g définies dans un voisinage de x_0 (fini ou non) sont équivalentes au voisinage x_0 , s'il existe une fonction h telle que $f(x)=g(x)[1+h(x)]$ avec $\lim\limits_{x\to x_0} h(x)=0$. On peut également dire que le rapport $\lim\limits_{x\to x_0}\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)=1$

Rappel : plan tangent au graphe

Pour une fonction de deux variables $f(x,y)=0$ (c'est à dire $y=f(x)$), on se rappelle que l'équation générale de la tangente à la courbe au point $(x_0, y_0=f(x_0))$ est $(x-x_0)\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)+(y-y_0)\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=0$

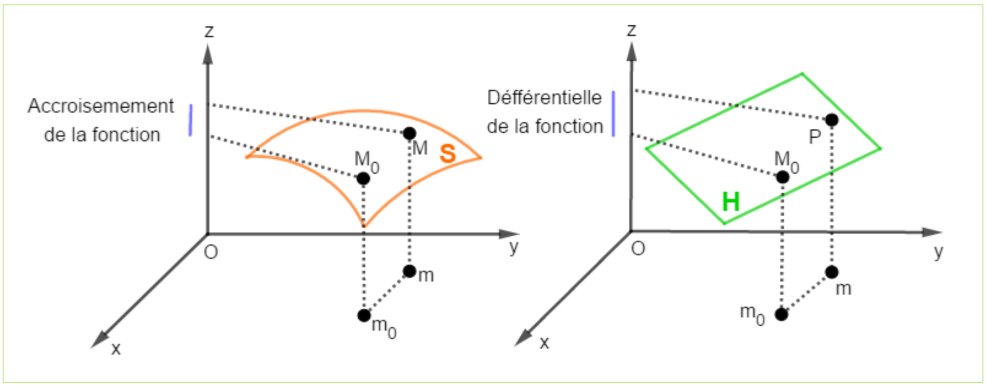
D'où $(y-y_0) = (x-x_0)\dfrac{-(\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0))}{\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)} = (x-x_0)f'(x_0)$

Ainsi, la tangente au point $(x_0,y_0=f(x_0))$ est : $y=f(x_0)+(x-x_0)f'(x_0)$.

Pour une fonction de trois variables $f(x,y,z)=0$ (c'est à dire $z=f(x,y)$), c'est presque pareil que pour une fonction de deux variables, l'équation du plan tangent au point $(x_0,y_0,z_0=f(x_0,y_0))$ est :

$$(x-x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)+(y-y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)+(z-z_0)\frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0) = 0 .$$

Interprétation géométrique de la différentielle



Soit $\begin{array}{l} f: U\subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y)\to f(x,y)\end{array}$ une fonction réelle $f(x,y)$ de deux variables continûment dérivable dans une partie ouverte U de $\mathbb{R}^2$.

Soit la surface S qui est le graphe de la fonction $f(x,y)$.

Soit $m_0=(x_0,y_0)$ un point de U et $M_0=(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ le point correspondant sur la surface S .

Il existe un plan H tangent à la surface S en $M_0=(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ ayant pour équation $z=f(x_0,y_0)+(x-x_0)\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)+(y-y_0)\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$.

Soit $m=(x_0+h,y_0+k)$ un point de U . Il lui correspond un point P sur le plan H dont la cote z est donnée par :

$$z=f(x_0,y_0)+(x-x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)+(y-y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$$
$$\Leftrightarrow\ z=f(x_0,y_0)+(x_0+h-x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)+(y_0+k-y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$$
$$\Leftrightarrow\ z=f(x_0,y_0)+(h)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)+(k)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$$
$$\Leftrightarrow\ z-f(x_0,y_0)=(h)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)+(k)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=(df(M)(h,k))+(|h|+|k|)o(1)\ \ quand\ \ (h,k)\to 0$$

Ainsi, la valeur de la différentielle $df(x_0,y_0)$ pour de petites variations (h,k) est l'accroissement de la côte sur le plan H quand on donne à (x_0,y_0) les accroissements (h,k) .

Comme les surfaces S et H sont proches, on peut dire que la différentielle $df(x_0, y_0)$ est une bonne approximation de l'accroissement de la fonction.

2 Différentielle d'une fonction

Soit $\begin{matrix} f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \\ M \to f(M) \end{matrix}$ une fonction réelle continûment dérivable dans une partie ouverte U de $\mathbb{R}^3$. L'application $df: M \to df(M)$ associe à chaque point M de U une forme linéaire sur $\mathbb{R}$. Cette application s'appelle la différentielle de f et se note df.

Cette différentielle n'existe pas toujours, et une fonction possédant une différentielle en un point est dite différentiable en ce point.

Dans l'approche de Leibniz, la différentielle d'une fonction est son accroissement infinitésimal, qui s'écrit comme une combinaison des accroissements infinitésimaux des différentes variables. Ainsi pour une fonction f des variables (x, y, z), son accroissement infinitésimal df s'exprime sous la forme : $df(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$.

Pour une seule variable, la différentielle df s'exprime sous la forme : $df(x) = f'(x) dx$

3 Différentielles des fonctions usuelles

$d(\ln x) = \frac{dx}{x}$	$d(e^x) = e^x dx$	$d(th\, x) = \frac{dx}{ch^2 x}$
$d(a^x) = a^x \ln a\, dx$	$d(x^\alpha) = \alpha x^{\alpha-1} dx$	$d(argsh\, x) = \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$
$d(\cos x) = -\sin x\, dx$	$d(\sin x) = \cos x\, dx$	$d(argch\, x) = \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$
$d(tg\, x) = \frac{dx}{\cos^2 x}$	$d(\arcsin x) = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$	$d(argth\, x) = \frac{dx}{1-x^2}$
$d(\arccos x) = \frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}}$	$d(arctg\, x) = \frac{dx}{1+x^2}$	$d(x\,y) = y\,dx + x\,dy$
$d(ch\, x) = sh\, x\, dx$	$d(sh\, x) = ch\, x\, dx$	$d(\frac{x}{y}) = \frac{y\,dx - x\,dy}{y^2}$
	$d(x+y) = dx + dy$	

Soient f et g deux fonctions de plusieurs variables de classe C^1. On a également les opérations suivantes sur les différentielles de fonction :

$d(fg) = g\,df + f\,dg$ – $d(\frac{f}{g}) = \frac{g\,df - f\,dg}{g^2}$ – $d(\lambda f) = \lambda\,df$ – $d(f+g) = df + dg$

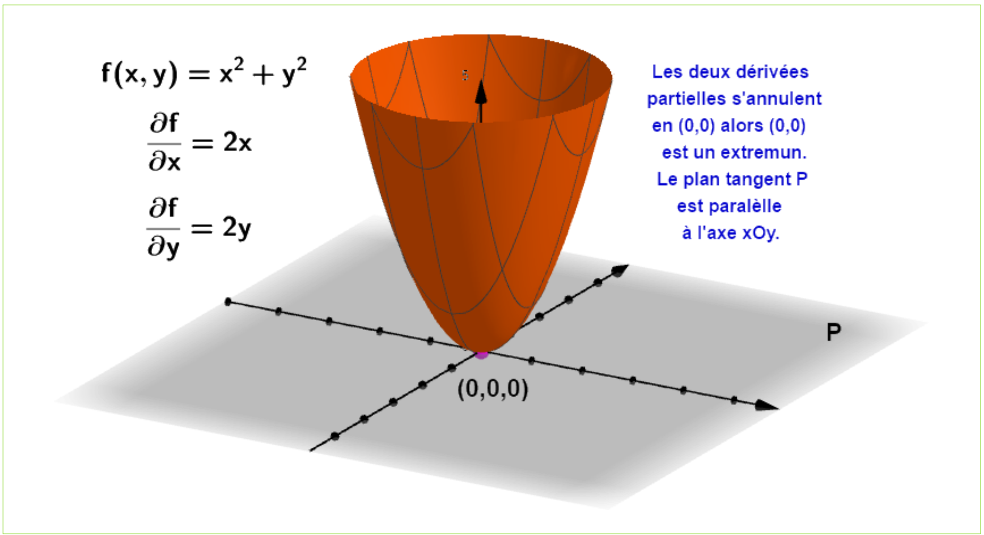
$d(f^\alpha) = \alpha f^{(\alpha-1)} df$ – $d(e^f) = e^f df$ – $d(\cos f) = -\sin f\, df$ – $d(\sin f) = \cos f\, df$

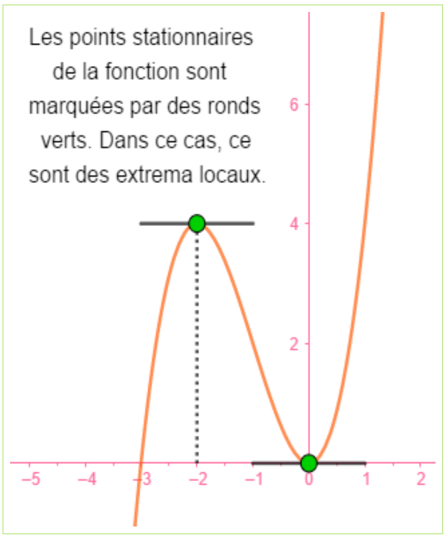
Par définition, la différentielle d'une constante est nulle ($df(cst) = 0$).

4 Fonctions stationnaires

Pour une fonction d'une variable réelle, un point stationnaire est un point de son graphe où sa dérivée s'annule. Cela se traduit par un point où la fonction arrête de croître ou de décroître. Ce sont les points où les droites tangentes sont parallèles à l'axe des abscisses x. La nature de l'extremum, minimum ou maximum dépend de la dérivée seconde si elle existe.

Pour une fonction de plusieurs variables réelles, un point stationnaire ou critique est un point où le gradient s'annule. Ce sont les points où le plan tangent est parallèle au plan xOy . La nature de l'extremum est alors donnée par les dérivées partielles secondes. La première partie de la recherche d'un extremum consiste donc à trouver les points d'annulation des dérivées partielles premières. Une fois ces points trouvés, il faut en déterminer la nature. Un point où les dérivées partielles premières s'annulent n'est pas nécessairement un extremum. Pour distinguer de tels extrema, il est nécessaire de considérer la dérivée seconde. Un tel point est appelé point stationnaire.





Définition d'une fonction stationnaire

Soit $\begin{array}{c} f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \to f(x,y) \end{array}$ une fonction continûment dérivable dans une partie ouverte U de $\mathbb{R}^2$. Soit (x_0, y_0) un point de U . Les conditions suivantes sont équivalentes :

- $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$
- $df((x_0, y_0)) = 0$
- Le plan tangent en $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ au graphe de f est parallèle à xOy .

Lorsqu'il en est ainsi, on dit que f est stationnaire en (x_0, y_0) .

Exemple

Soit la fonction $f(x,y) = a x^2 + b y^2$ où a, b sont des constantes non nulles.

Les dérivées partielles de $f(x,y)$ sont : $\frac{\partial f}{\partial x} = 2 a x$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = 2 a y$

Au point (0,0), $\frac{\partial f}{\partial x}(0{,}0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0{,}0) = f(0{,}0) = 0$ et $df((0{,}0)) = 0$

Ainsi, le plan tangent en $(0{,}0, f(0{,}0))$ au graphe $f(x,y)$ est parallèle à xOy . Donc la fonction $f(x,y)$ est stationnaire en $(0{,}0)$.

Si $a>0$ et $b>0$, $\forall(x,y),\ f(x,y)\geqslant 0$, la fonction $f(x,y)$ admet un minimum en $(0,0)$.

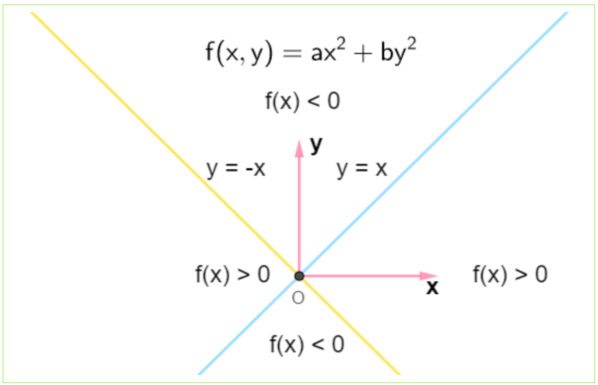
Si $a<0$ et $b<0$, $\forall(x,y),\ f(x,y)\leqslant 0$, la fonction $f(x,y)$ admet un maximum en $(0,0)$.

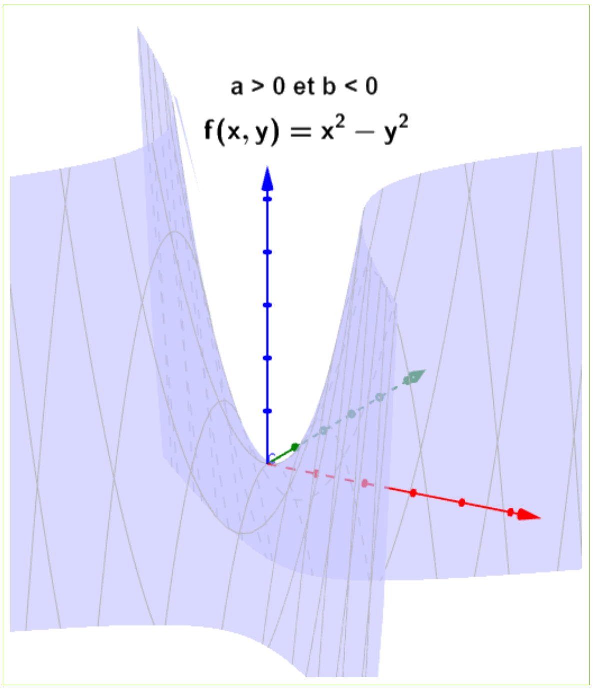
Si $a>0$ et $b<0$, $f(x,y)=a\,x^2+b\,y^2=(\sqrt{a}\,x+\sqrt{-b}\,y)(\sqrt{a}\,x-\sqrt{-b}\,y)$

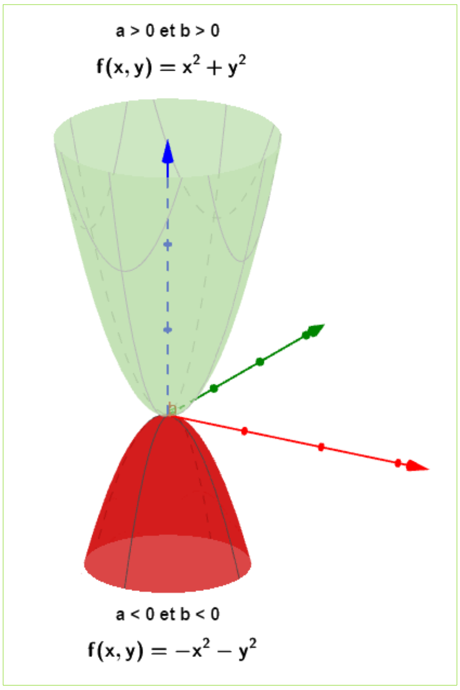
Alors, $f(x,y)=0\Leftrightarrow y=\pm(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{-b}}\,x)=\pm(\sqrt{\frac{a}{-b}})\,x$

Ainsi, le signe de la fonction $f(x,y)$ dépend de la position du point (x,y) par rapport aux droites $y=\pm(\sqrt{\frac{a}{-b}})x$.

Pour illustrer cet exemple par un graphe, prenons le cas où $a=1$ et $b=-1$, alors $y=\pm x$.







5 Qu’est-ce qu’une fonction de classe C1 ?

Fonction d'une variable réelle

Soit f une fonction définie sur un intervalle U de $\mathbb{R}$. On dit que f est de classe C^1 si f est dérivable sur U , et f' est continue sur U .

On dit que f est de classe C^k si toutes les dérivées de f jusqu'à l'ordre k existent sur U , et si la dérivée d’ordre k , $f^{(k)}$, est continu sur U .

Les fonctions usuelles telles que les polynômes, les exponentielles, les logarithmes, les fonctions trigonométriques,...sont de classe C^∞ sur leur domaine de définition.

Fonction de plusieurs variables réelles

Soit f une fonction définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$. On dit que f est de classe C^1 si toutes les dérivées partielles de f existent et sont continues sur U .

Pour les fonctions différentiables : soit f une fonction définie sur un ouvert U de R^n . f est de classe C^1 sur U si et seulement si f est différentiable sur U et si l'application $df : x \to df(x)$ est continue.