Les équations différentielles

Table des matières

1. Généralités sur les équations différentielles....1
2. Équations différentielles linéaire du premier ordre....2
   2.1. Méthode de Lagrange....2
   2.2. Méthode de résolution de l'ED du premier ordre....3
   2.3. Un Exemple d'ED du premier ordre....3
   2.4. Théorème de Cauchy....4
   2.5. Principe de superposition des solutions....5
3. ED linéaire du 2nd ordre à coefficients constants....5
   3.1. Théorème de Cauchy....5
   3.2. Résolution de l'ED homogène....5
   3.3. Le cas particulier où a, b et c sont des réels....6
      a) Résolution de l'ED homogène....6
      b) Résolution de l'ED générale....6
      c) Les solutions particulières selon le type du second membre....6
      d) Principe de superposition des solutions....7
   3.4. Un exemple de résolution d'une ED du 2nd ordre....7

Ce document de mathématiques a été rédigé par Didier VERHILLE.

1. Généralités sur les équations différentielles

Une équation différentielle ED est une fonction combinée avec des dérivées. La solution d'une équation différentielle est une fonction et non un nombre comme dans les équations classiques, c'est à dire un objet mathématique beaucoup plus compliqué qu'un nombre. La solution est définie à des constantes près. Seules des informations complémentaires, dites conditions initiales, permettent de préciser la solution. Ces conditions initiales correspondent au passage de la courbe par des points particuliers.

Une équation classique fait intervenir un polynôme comme par exemple $a x^2 + bx + c = 0$

Une équation différentielle est une équation qui fait intervenir en plus des dérivées comme par exemple $a x^2 + bx + c + \frac{dx}{dt} = 0$

Trouver une solution à une équation différentielle, c'est résoudre l'équation ou l'intégrer. La solution à trouver est une fonction qu'on appelle solution ou intégrale.

Une équation différentielle est dite du premier ordre si elle peut s'écrire par exemple sous la forme $y + \frac{dy}{x} = 0 \;\; ou \;\; y + y' = 0$

Une équation différentielle est dite du second ordre si elle peut s'écrire par exemple sous la forme $y + \frac{dy}{x} + \frac{d^2 y}{x^2} = 0 \;\; ou \;\; y + y' + y'' = 0$

2. Équations différentielles linéaire du premier ordre

Une équation de la forme $y'(x)=f(x,y(x))$ (1) s'appelle une équation différentielle (ED) du premier ordre. On appelle solution ou intégrale de (1) toute fonction réelle $x\to\varphi(x)$ définie à une constante près et une fois dérivable dans un intervalle I tel que $\forall x\in I,\ \varphi'(x)=f(x,\varphi(x))$

Soient a(x) et b(x) deux fonctions définies et continues sur l'intervalle $I\in\mathbb{R}$ à valeurs sur K ($\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$).

Soit ED $y'(x)+a(x)y(x)=b(x)$ (E)

Résoudre (E), c'est trouver une fonction $x\to\varphi(x)$, définie à une constante près et dérivables sur I.

φ *est solution de l'ED* (E) $\Leftrightarrow$ $\forall x\in I,\ \varphi'(x)+a(x)\varphi(x)=b(x)$

Les courbes $\varphi(x)$ des solutions de (E) sur I s'appellent les courbes intégrales de (E).

2.1. Méthode de Lagrange

Soient $a:x\to a(x)$ *et* $b:x\to b(x)$ deux fonctions continues et définies sur $I\in\mathbb{R}$ à valeurs sur K.

Nous voulons résoudre sur I l'ED $y'(x)+a(x)y(x)=b(x)$ (1)

Si la fonction $b(x)=0$, l'ED est dite homogène. Dans ce cas, l'équation $y'(x)+a(x)y(x)=0$ (2) est appelée l'équation homogène associée à l'équation (1).

Supposons la fonction a(x) continue sur l'intervalle I. Soit $A(x)$ une primitive de a(x) sur I. Les solutions dans I de $y'(x)+a(x)y(x)=0$ sont données par la formule $y=C\,\mathrm{e}^{-A(x)}$ où $C\in K$ est une constante arbitraire.

Si la fonction $b(x)\neq 0$, les solutions $\varphi(x)$ sur I de l'ED $y'(x)+a(x)y(x)=b(x)$ sont des fonctions de la forme :

$$x\to\varphi(x)\ =\ C\mathrm{e}^{-A(x)}+e^{-A(x)}\int_{x_0}^{x}b(t)e^{A(t)}dt,\ \ C\in K\ \ et\ \ x_0\in I$$

Comment a-t-on obtenu ce résultat ?

Astuce : Pour résoudre l'ED (1), il faut multiplier les deux membres de l'égalité par $\mathrm{e}^{A(x)}$

En effet,

φ *est solution de l'ED* (1)

$$\Leftrightarrow\ \forall x\in I,\ \mathrm{e}^{A(x)}\neq 0,\ \varphi'(x)+a(x)\varphi(x)\ =\ b(x)\ \Leftrightarrow\ \varphi'(x)\mathrm{e}^{A(x)}+a(x)\varphi(x)\mathrm{e}^{A(x)}\ =\ b(x)\mathrm{e}^{A(x)}$$

$$\Leftrightarrow\ \forall x\in I,\ (\mathrm{e}^{A}\varphi)'(x)\ =\ b(x)\mathrm{e}^{A(x)}$$

$$\Leftrightarrow\ \exists C\in K,\ \forall x\in I,\ (\mathrm{e}^{A}\varphi)(x)\ =\ \mathrm{e}^{A}(x)\varphi(x)\ =\ C+\int_{x_0}^{x}b(t)\mathrm{e}^{A(t)}dt$$

$$\Leftrightarrow\ \exists C\in K,\ \forall x\in I,\ (\varphi)(x)\ =\ C\mathrm{e}^{-A(x)}+\mathrm{e}^{-A(x)}\int_{x_0}^{x}b(t)\mathrm{e}^{A(t)}dt$$

Remarque : De nombreuses ED se ramènent à des ED à variables séparées par changement de variable ou changement de fonction inconnue. Par exemple, pour l'ED $y' = f(\frac{y}{x})$ où $x \neq 0$, on peut poser $z = \frac{y}{x}$

2.2. Méthode de résolution de l'ED du premier ordre

Soient a(x) et b(x) deux fonctions définies et continues sur l'intervalle $I \in \mathbb{R}$ à valeurs sur K.

La solution générale de l'ED $y'(x)+a(x)y(x)=b(x)$ (1) sur I sont des fonctions de la forme $\varphi=C\varphi_0+\varphi_1$ où φ_0 est une solution générale non nulle sur I de l'ED homogène quand $b(x)=0$ et φ_1 une solution particulière sur I de l'ED (1) quand $b(x) \neq 0$.

Autrement dit, la solution générale sur I de l'ED (1) est la somme de la solution générale de l'équation homogène associée à (1) et d'une solution particulière de l'ED (1).

- Première étape

On résout l'ED homogène $y'(x)+a(x)y(x)=0$, ce qui donne $\varphi=C\varphi_0$ où φ_0 est une solution générale non nulle sur I de l'ED homogène et $C \in K$

- Seconde étape

Pour trouver une solution particulière de l'ED (1), soit on fait un changement de variable dans l'ED $y'(x)+a(x)y(x)=b(x)$, soit on considère la constante C dans la solution $\varphi=C\varphi_0$ de l'ED homogène $y'(x)+a(x)y(x)=0$ comme une fonction inconnue de x. Ainsi appelle-t-on cette méthode la méthode de variation des constantes.

Par la méthode de variation des constantes, il existe une solution particulière de l'ED (1) sur I de la forme $\varphi_1 : x \rightarrow C(x)\varphi_0(x)$ où $C(x),\ \varphi_0,\ \varphi_1$ sont des fonctions dérivables sur I et $\varphi'_1 : x \rightarrow C'(x)\varphi_0(x)+C(x)\varphi'_0(x)$. De plus, la fonction C, pour φ_0 ne s'annulant pas sur I, vérifie $C'=\frac{b}{\varphi_0}$.

Démontrons ce résultat.

Soient $\varphi_1=C\varphi_0$ et $\varphi'_1=C'\varphi_0+C\varphi'_0$ avec $\varphi_0 \neq 0$

$\varphi_1=C\varphi_0$ est une solution de l'ED $y'(x)+a(x)y(x)=b(x)$ ssi

$$\varphi'_1+a\varphi_1=b \Leftrightarrow C'\varphi_0+C\varphi'_0+aC\varphi_0=b \Leftrightarrow C'\varphi_0+C(\varphi'_0+a\varphi_0)=b \Leftrightarrow C'\varphi_0=b \Leftrightarrow C'=\frac{b}{\varphi_0}$$

Comme b et $\varphi_0 \neq 0$ sont définies, continues et dérivable sur I, alors $\frac{b}{\varphi_0}$ est continue sur I. Ainsi, la fonction $\frac{b}{\varphi_0}$ admet une primitive sur I, d'où on en déduit l'existence de C.

2.3. Un Exemple d'ED du premier ordre

Pour illustrer la théorie ci-dessus, résolvons par exemple l'ED $y'+y=e^{-x}$ sur intervalle $I=]-\infty,+\infty[$

La solution de l'ED homogène sur I est

$$y'+y=0 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx}+y=0 \Leftrightarrow \frac{dy}{y}=-dx \Leftrightarrow \ln(x)=-x+cst \Leftrightarrow y=Ce^{-x}$$

Sans faire de calcul, comme $a=1$, sa primitive vaut $A(x)=x+cst$ et on retrouve la solution de l'ED homogène sous la forme $y=Ce^{-x}$

Appliquons la méthode de variation des constantes en considérant C comme une fonction de C(x).

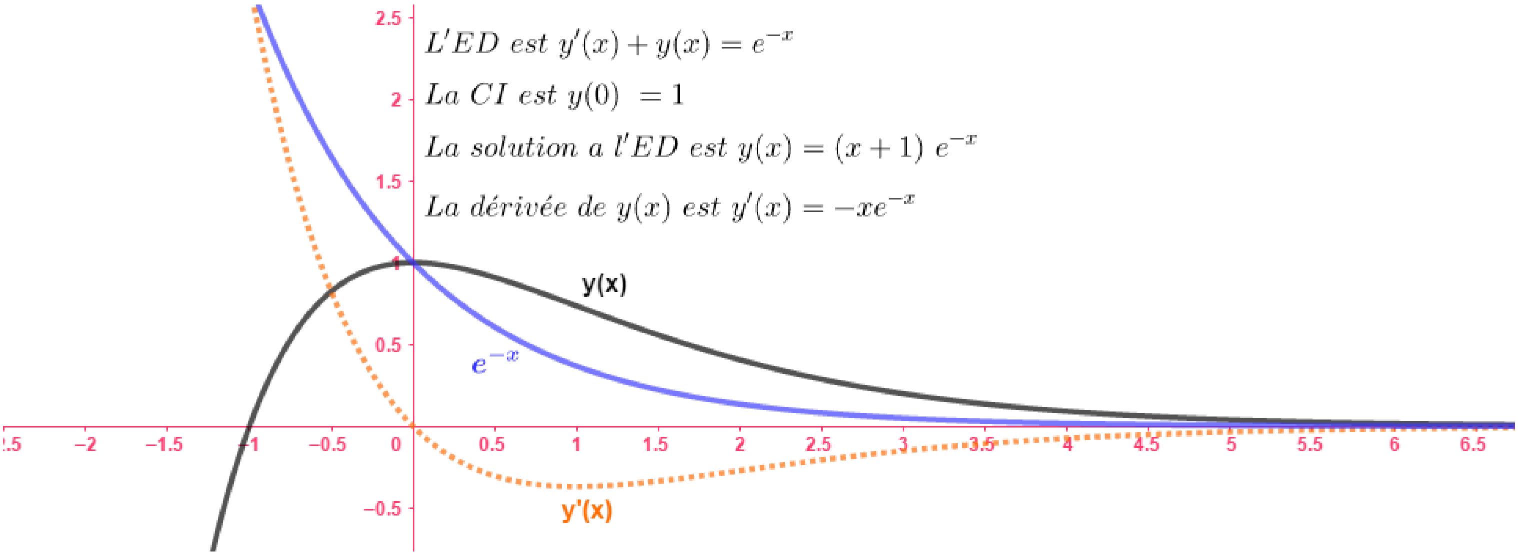
$y(x)=C(x)e^{-x}$; $y'(x)=C'(x)e^{-x}-C(x)e^{-x}$

$$y'(x)+y(x)=e^{-x} \Leftrightarrow C'(x)e^{-x}-C(x)e^{-x}+C(x)e^{-x}=e^{-x} \Leftrightarrow C'(x)e^{-x}=e^{-x} \Leftrightarrow C'(x)=1$$

D'où $C(x)=x+\lambda$ où $\lambda \in R$

La solution générale de l'ED sur I est $y(x)=(x+\lambda)e^{-x}$

Si l'on considère qu'il existe une condition initiale telle que $y(0)=1$, alors on en déduit $\lambda=1$. Ainsi, la solution générale de l'ED sur I est $y(x)=(x+1)e^{-x}$. Quand on connaît une condition initiale à l'ED, la solution est unique.



2.4. Théorème de Cauchy

Soient a(x) et b(x) deux fonctions définies et continues sur l'intervalle $I \in R$ à valeurs sur K.

Soit l'ED $y'(x)+a(x)y(x)=b(x)$ (E)

$$\forall (x_0, y_0) \in I.K,\ \exists \text{ une seule solution } \varphi \text{ de } l'ED\ (E) \text{ vérifiant la condition initiale } \varphi(x_0)=y_0$$

Le théorème de Cauchy montre l'existence et l'unicité d'une solution vérifiant la condition initiale $y_0=\varphi(x_0)$

Une solution évidente de l'ED $y'(x)+a(x)y(x)=0$ sur I est nécessairement la fonction nulle.

Toute solution non nulle sur I de l'ED $y'(x)+a(x)y(x)=0$ ne s'annule pas sur I.

Le théorème de Cauchy est valable que si les solutions de l'ED sont définies et continues sur I.

2.5. Principe de superposition des solutions

Soient a(x), b_1(x) et b_2(x) trois fonctions définies et continues sur l'intervalle $I\in R$ à valeurs sur K. Soient λ_1 et λ_2 deux nombres sur K.

Soit φ_1 une solution particulière sur I de l'équation $y'(x)+a(x)y(x)=b_1(x)$

Soit φ_2 une solution particulière sur I de l'équation $y'(x)+a(x)y(x)=b_2(x)$

Alors, la fonction $\varphi=\lambda_1\varphi_1+\lambda_2\varphi_2$ est une solution particulière de l'ED $y'(x)+a(x)y(x)=b(x)$ où $b(x)=\lambda_1 b_1(x)+\lambda_2 b_2(x)$

3. ED linéaire du 2nd ordre à coefficients constants

Jusqu'ici, les ED considérées ne faisaient intervenir que la dérivée première de la fonction inconnue. Si l'on considère les équations faisant intervenir la dérivée seconde d'une équation inconnue, on obtient des équations d'ordre 2.

Une équation de la forme $y''(x)=f(x,y(x),y'(x))$ (1) s'appelle une équation différentielle (ED) du second ordre. On appelle solution ou intégrale de (1) toute fonction réelle $x\rightarrow\varphi(x)$ définie et deux fois dérivables dans un intervalle I tel que $\forall x\in I,\ \varphi''(x)=f(x,\varphi(x),\varphi'(x))$

On appelle ED linéaire du second ordre une équation de la forme $ay''(x)+by'(x)+cy(x)=g(x)$ (2) où $a\neq 0,\ b,\ c$ sont des constantes sur K et g(x) une fonction continue sur un intervalle I de R à valeur dans K.

Les solutions de l'ED (2) sur I sont les fonctions $x\rightarrow\varphi(x)$, deux fois dérivables sur I à valeurs dans K, vérifiant

$\forall x\in I,\ a\varphi''(x)+b\varphi'(x)+c\varphi(x)=g(x)$

L'ED homogène de (2) est $ay''(x)+by'(x)+cy(x)=0$

3.1. Théorème de Cauchy

Soient $(a,b,c)\in K^*.K.K$ et g(x) une fonction définie et continue sur un intervalle I de R à valeur dans K.

Pour tout $(x_0,y_0,z_0)\in I.K.K$, il existe une solution $x\rightarrow\varphi(x)$ de l'ED $ay''(x)+by'(x)+cy(x)=g(x)$ sur I et une seule vérifiant les conditions initiales $\varphi(x_0)=y_0\ \ et\ \ \varphi'(x_0)=z_0$

3.2. Résolution de l'ED homogène

Soient $(a,b,c)\in K^*.K.K$, soit l'ED homogène $ay''(x)+by'(x)+cy(x)=0$

L'équation caractéristique EC de l'ED homogène $ay''(x)+by'(x)+cy(x)=0$ associée à $ay''(x)+by'(x)+cy(x)=g(x)$ est l'équation $az^2+bz+c=0$ d'inconnue d'un nombre z.

Le discriminant $\Delta=b^2-4ac$ de l'équation caractéristique est un complexe. Deux cas de figure se présentent selon le signe de Δ.

Si l'EC a deux solutions distincts $(r_1,r_2)\in K^2$, les solutions de l'équation homogène sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme $x\rightarrow\lambda e^{r_1x}+\mu e^{r_2x},\ (\lambda,\mu)\in K^2$

Si l'EC a une solution double $r \in K$, les solutions de l'équation homogène sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme $x \to (\lambda + \mu x) e^{rx},\ (\lambda, \mu) \in K^2$

3.3. Le cas particulier où a, b et c sont des réels

a) Résolution de l'ED homogène

On note $az^2 + bz + c = 0$ l'équation caractéristique associée et Δ le discriminant du trinôme $az^2 + bz + c$

Le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ de l'équation caractéristique est un réel. Trois cas de figure se présentent selon le signe de Δ.

Soient $(a, b, c) \in \mathbb{R}^*.\mathbb{R}.\mathbb{R}$, soit l'ED homogène $ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0$

- Si $\Delta > 0$, l'EC a deux solutions réelles distincts r_1 et r_2. Les solutions de l'ED homogène sur $\mathbb{R}$ sont des fonctions de la forme $x \to \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x},\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$
- Si $\Delta = 0$, l'EC a une solution réelle double r. Les solutions de l'ED homogène sur $\mathbb{R}$ sont des fonctions de la forme $x \to (\lambda + \mu x) e^{rx},\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$
- Si $\Delta < 0$, l'EC a deux solutions non réelles conjuguées $r_1 = u + iv$ et $r_2 = u - iv$ où $(u, v) \in \mathbb{R}.\mathbb{R}^*$. Les solutions de l'ED homogène sur $\mathbb{R}$ sont des fonctions de la forme $x \to (\lambda \cos(vx) + \mu \sin(vx)) e^{ux},\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2,\ (u, v) \in \mathbb{R}.\mathbb{R}^*$

b) Résolution de l'ED générale

Le cas général où g(x) est une fonction continue.

Soient $(a, b, c) \in \mathbb{R}^*.\mathbb{R}.\mathbb{R}$, soit g(x) une fonction continue sur un intervalle $I \in \mathbb{R}$ à valeur dans K.

Soit l'ED $ay''(x) + by'(x) + cy(x) = g(x)$ (E)

D'après le principe de superposition des solutions, la solution de l'ED (E) sur I est la somme d'une solution particulière de (E) sur I et de la solution générale sur I de l'ED homogène associée $ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0$

c) Les solutions particulières selon le type du second membre

- **Second membre du type** $C e^{\lambda x},\ (C, \lambda) \in \mathbb{C}^2$

Soit (E) l'ED $ay''(x) + by'(x) + cy(x) = C e^{\lambda x}$ où $a \neq 0, b, c, C, \lambda$ sont des nombres complexes.

Si λ n'est pas racine de l'EC $az^2 + bz + c = 0$, il existe une solution particulière de (E) sur $\mathbb{R}$ de la forme $x \to D e^{\lambda x}$ où D est un nombre complexe.

Si λ est racine de l'EC $az^2 + bz + c = 0$ mais pas racine double, il existe une solution particulière de (E) sur $\mathbb{R}$ de la forme $x \to D x e^{\lambda x}$ où D est un nombre complexe.

Si λ est racine double de l'EC $az^2 + bz + c = 0$, il existe une solution particulière de (E) sur $\mathbb{R}$ de la forme $x \to D x^2 e^{\lambda x}$ où D est un nombre complexe.

- **Second membre du type** $A\cos(\omega x)$ *ou* $A\sin(\omega x)$

Soit (E) l'ED $ay''(x)+by'(x)+cy(x)=A\cos(\omega x),\ (A,\omega)\in\mathbb{R}^2$

Posons $A\mathrm{e}^{i\omega x}=A\cos(\omega x)+iA\sin(\omega x)$

Si $(a,b,c)\in\mathbb{R}^*.\mathbb{R}.\mathbb{R}$, et

si $\varphi(x)$ est une solution de l'ED $ay''(x)+by'(x)+cy(x)=A\mathrm{e}^{i\omega x},\ (A,\omega)\in\mathbb{R}^2$,

alors $\forall x\in\mathbb{R}$,

$A\cos(\omega x)\ =\ \Re(A\mathrm{e}^{i\omega x})\ =\ \Re(a\varphi''(x)+b\varphi'(x)+c\varphi(x))\ =\ a\Re(\varphi'')(x)+b\Re(\varphi')(x)+c\Re(\varphi)(x)$

On en déduit que $\Re(\varphi)$ est une solution de l'ED (E).

De même, $\Im(\varphi)$ est une solution de l'ED $ay''(x)+by'(x)+cy(x)=A\sin(\omega x),\ (A,\omega)\in\mathbb{R}^2$

d) Principe de superposition des solutions

Soient $a\neq 0,b,c$ trois nombres complexes. Soient g_1 et g_2 deux fonctions définies et continues sur l'intervalle $I\in R$ à valeurs sur K. Soient λ_1 et λ_2 deux nombres sur K.

Soit φ_1 une solution particulière sur I de l'équation $ay''(x)+by'(x)+cy(x)=g_1(x)$

Soit φ_2 une solution particulière sur I de l'équation $ay''(x)+by'(x)+cy(x)=g_2(x)$

Alors, la fonction $\varphi=\lambda_1\varphi_1+\lambda_2\varphi_2$ est une solution particulière de l'ED $ay''(x)+by'(x)+cy(x)=g(x)$ où $g(x)=\lambda_1 g_1(x)+\lambda_2 g_2(x)$

3.4. Un exemple de résolution d'une ED du 2nd ordre

Soit l'ED linéaire du second ordre à coefficients constants $y''(x)+2y'(x)+y(x)=2\mathrm{e}^{-x}$ (E)

L'ED homogène est $y''(x)+2y'(x)+y(x)=0$ (E_0)

L'EC $r^2+2r+1=0$ admet une racine réelle double $r_1 = r_2 = -1$

La solution générale de l'équation différentielle homogène (E_0) sur $\mathbb{R}$ est une fonction du type $x\to(\lambda+\mu x)\mathrm{e}^{-x},\ (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$

Le second membre de l'ED (E) est du type $C\mathrm{e}^{\lambda x},\ (C,\lambda)\in\mathbb{R}^2\ \text{avec}\ \lambda=-1\ \text{et}\ C=2$

Comme $\lambda=-1$ est racine double de l'EC, il existe une solution particulière de (E) sur $\mathbb{R}$ de la forme $x\to Dx^2\mathrm{e}^{\lambda x}$ où D est un nombre réel à déterminer.

$$\begin{gathered} y_1=Dx^2\mathrm{e}^{-x} \\ y'_1=2Dx\mathrm{e}^{-x}-Dx^2\mathrm{e}^{-x}=D(2x-x^2)\mathrm{e}^{-x} \\ y''_1=D(2-4x+x^2)\mathrm{e}^{-x} \end{gathered}$$

En reportant ces résultats dans l'ED (E), on obtient

$y''(x)+2y'(x)+y(x)=2\mathrm{e}^{-x}=2D\mathrm{e}^{-x}\ \ d'où\ \ D=1$

La solution particulière de (E) sur $\mathbb{R}$ s'écrit $y_1=x^2\mathrm{e}^{-x}$

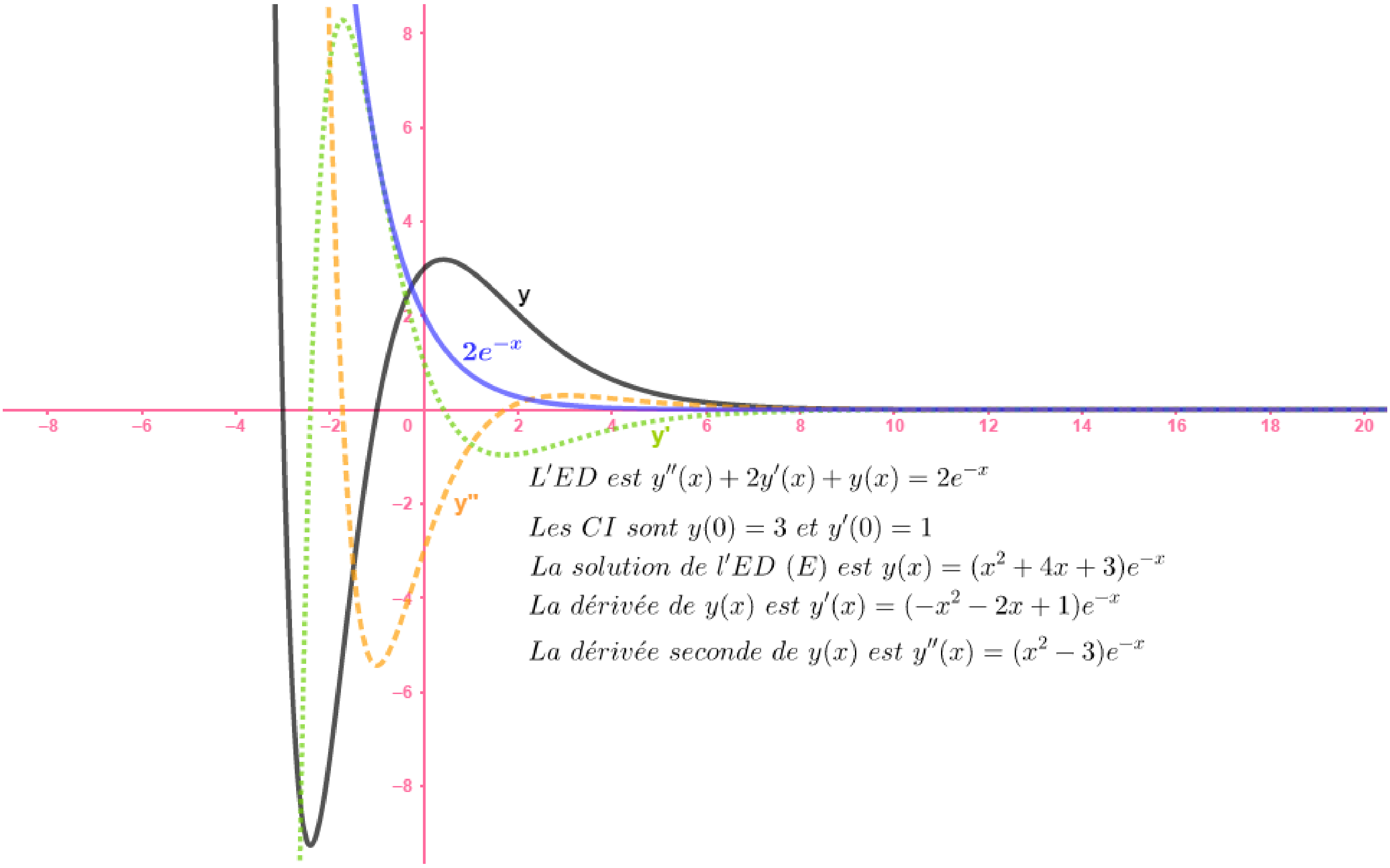
D'après le principe de superposition des solutions, la solution de l'ED (E) sur I est la somme d'une solution particulière de (E) sur I et de la solution générale sur I de l'ED homogène associée à (E).

$x \rightarrow \varphi(x) = (x^2 + \lambda + \mu x)\mathrm{e}^{-x}, \ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$

Pour déterminer les valeurs de λ et μ, on doit utiliser deux conditions initiales.

Si $\varphi(0) = 3$ *et* $y'(0) = 1$ *alors* $\lambda = 3$ *et* $\mu = 4$

La solution $\varphi(x)$ de l'ED (E) avec les deux conditions initiales est $\varphi(x) = y(x) = (x^2 + 4x + 3)\mathrm{e}^{-x}$



On constate bien que la solution d'une équation différentielle (E) est une fonction et non un nombre comme dans les équations classiques, c'est à dire un objet mathématique beaucoup plus compliqué qu'un nombre.