Les fonctions implicites

Table des matières

Ce document de mathématiques a été rédigé par Didier VERHILLE.

Une équation entre différentes variables où une variable n'est pas explicitée en fonction des autres est appelée une équation implicite. Une fonction implicite est une fonction qui se déduit implicitement d'une telle équation.
Par exemple, le cercle trigonométrique a pour équation $x^2+y^2-1=0$. Or, les courbes que l’on peut tracer sur un graphe ont pour équation $y=\varphi(x)$. On dit que y est une fonction implicite de x .

1 Définition et existence d’une fonction implicite

Soit une fonction $\begin{matrix} f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R} \\ (x,y)\to f(x,y)\end{matrix}$, on appelle fonction implicite définie par l’équation $f(x,y)=0$ toute fonction $y=\varphi(x)$ définie dans un intervalle I de $\mathbb{R}$ telle que $f(x,\varphi(x))=0,\ \forall x\in I$.

La fonction $f(x,y)=0$ définit aussi x comme fonction implicite de y , en échangeant les rôles de x et y , il existe une fonction $x=\psi(y)$ définie dans un intervalle J de $\mathbb{R}$ telle que $f(\psi(y),y)=0,\ \forall y\in J$.

Par exemple, supposons l’équation $x^2+y^2=1$ et définissons y comme fonction implicite de x . On peut ainsi écrire une fonction implicite pour les y positifs : $y=\sqrt{1-x^2},\ \forall x\in]-1,1[$. Pour y quelconque, l’équation ne définit pas de fonction implicite.

Théorème

Soit $\begin{matrix} f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R} \\ (x,y)\to f(x,y)\end{matrix}$ une fonction de classe C^1 dans une partie ouverte U de R^2 .
Soit $M=(x_0,y_0)$ un point de U tel que $f(x_0,y_0)=0$.
Supposons que $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\neq 0$. Il existe deux nombres réels strictement positifs α et β possédant les propriétés suivantes :

- $\forall x\in]x_0-\alpha,x_0+\alpha[$, l’équation en y de $f(x,y)=0$ admet une solution unique dans l’intervalle $]y_0-\beta,y_0+\beta[$.
- Si $y=\varphi(x)$ désigne cette solution, la fonction $y=\varphi(x)$ est de classe C^1 dans l’intervalle $]x_0-\alpha,x_0+\alpha[$.

- On a $\dfrac{d\varphi(x)}{dx}=\varphi'(x)=\dfrac{-\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,\varphi(x))}{\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,\varphi(x))}$ dans l'intervalle $]x_0-\alpha,x_0+\alpha[$.

La fonction $y=\varphi(x)$ est définie dans le rectangle $]x_0-\alpha,x_0+\alpha[x]y_0-\beta,y_0+\beta[$.

En admettant les deux premières propriétés, la dernière propriété se démontre en dérivant l'équation $f(x,\varphi(x))=0$ en fonction de x . En utilisant le théorème des fonctions composées définit dans le cours des dérivées partielles, on a $\forall x\in]x_0-\alpha,x_0+\alpha[x]y_0-\beta,y_0+\beta[$, $f'(x,y=\varphi(x))=\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,\varphi(x))+\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,\varphi(x))\varphi'(x)=0$, d'où $\varphi'(x)=\dfrac{-\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,\varphi(x))}{\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,\varphi(x))}$

Exemple

Reprenons l'équation $f(x,y)=x^2+y^2-1=0$ et définissons la fonction implicite $y=\varphi(x)$ de cette équation pour les y positifs.

Les dérivées partielles de $f(x,y)$ sont : $\dfrac{\partial f}{\partial x}=2x$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}=2y=2\varphi(x)$

Pour qu'une solution existe, il faut que $\dfrac{\partial f}{\partial y}=2y\neq 0$, soit $y\neq 0$

En prenant le point $M=(0,1)$, on a $f(0,1)=0$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,1)=2$. On peut donc exprimer au point $(0,1)$ une fonction implicite $y=\varphi(x)$ unique telle que l'on a :

$$\varphi'(x)=\frac{-x}{\varphi(x)}=\frac{d\varphi(x)}{dx}\ \Leftrightarrow\ \varphi(x)d\varphi(x)=-x\,dx\ \Leftrightarrow\ y\,dy=-x\,dx\ \Leftrightarrow\ \frac{y^2}{2}=\frac{-x^2}{2}+cst$$

Soit $y^2=cst-x^2$, d'où $y=\sqrt{cst-x^2}=\varphi(x),\ \forall|x|\leqslant cst$ pour les y positifs.

Au point $M=(0,1)$, on en déduit que $cst=1$.

La fonction implicite en ce point pour les y positifs est $y=\varphi(x)=\sqrt{1-x^2}$

La dérivée de la fonction implicite est $y'=\varphi'(x)=\dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}},\ \forall|x|<1$

Au point $(1,0)$, respectivement au point $(-1,0)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}=2y=0$, on ne peut plus appliquer le théorème des fonctions implicites. En revanche, autour du point $(1,0)$, respectivement autour du point $(-1,0)$, on peut exprimer y en fonction de x . Ainsi, en excluant les points $(1,0)$ et $(-1,0)$, la fonction implicite pour les y positifs est $y=\varphi(x)=\sqrt{1-x^2},\ \forall|x|<1$.

2 Tangente à la courbe

Soit $\begin{matrix} f:\mathbb{R}^2\rightarrow\mathbb{R} \\ (x,y)\rightarrow f(x,y)\end{matrix}$ une courbe de classe C^1 dans une partie ouverte U de R^2 telle que $f(x,y)=0$. La courbe a une tangente en chaque point de U qui est définie pour deux variables par l'équation générale $(X-x)\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)+(Y-y)\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)\ =\ 0$

D'où $(Y-y) = (X-x)\dfrac{-(\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y))}{\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)} = (X-x)\varphi'(x)$ car $\varphi'(x)=\dfrac{-\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,\varphi(x))}{\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,\varphi(x))}$

Ainsi, la tangente en chaque point de U est : $Y = \varphi(x)+(X-x)\varphi'(x)$

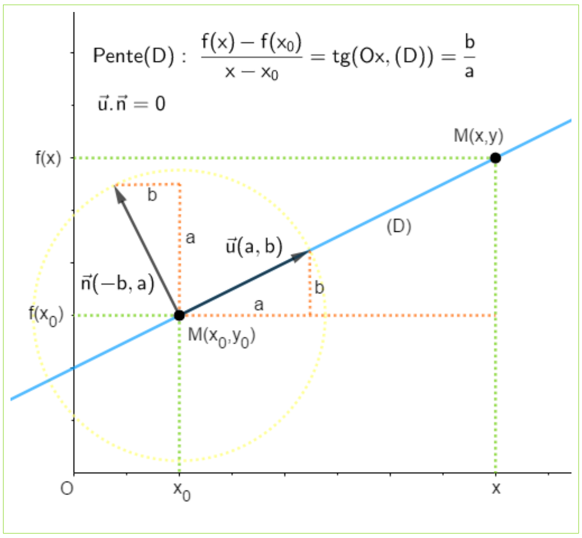
3 Normale à la courbe

Soit $\begin{matrix} f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R} \\ (x,y)\to f(x,y)\end{matrix}$ une courbe de classe C^1 dans une partie ouverte U de R^2 telle que $f(x,y)=0$. La courbe a une tangente en chaque point $M(x,y)$ de U qui est définie par l'équation $Y = \varphi(x)+(X-x)\varphi'(x)$.
La normale à la courbe en chaque point de U est parallèle au vecteur de coordonnées $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y),\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$, c'est à dire au $\overrightarrow{grad} f$. Ainsi, pour tout déplacement élémentaire de $M(x,y)$ sur la courbe, on a $df(M)=\overrightarrow{grad} f(M).\overrightarrow{dM}=0$. La normale à une courbe en un point est la perpendiculaire à la tangente $\overrightarrow{dM}$ en ce point.

Équation de la normale

Supposons que la courbe $f(x,y)=0$ est définie par son équation cartésienne de la forme $y=\varphi(x)$. Et, supposons également que $y=\varphi(x)$ admet au point $M(x_0,y_0)$ une tangente d'équation $y = \varphi(x_0)+(x-x_0)\varphi'(x_0)$.

Si $\varphi'(x)=0$, la tangente est parallèle à l'axe des abscisses. Et la normale est parallèle à l'axe des ordonnées.
Si $\varphi'(x)\neq 0$, la pente de la normale est $\dfrac{-1}{\varphi'(x_0)}$ et son équation cartésienne est de la forme $y=\varphi(x_0)-\dfrac{1}{\varphi'(x_0)}(x-x_0)$.



De façon générale, l'équation d'une droite (D) passant par le point $M(x_0,y_0)$ de $f(x)$ s'écrit sous la forme $a(f(x)-f(x_0))=b(x-x_0)$.
$\vec{u}(a,b)$ est le vecteur directeur de la droite (D) ;
$\vec{n}(-b,a)$ est dirigé dans le sens de la normale et le produit scalaire $\vec{u}(a,b).\vec{n}(-b,a)=0$;

Dans le cas des fonctions implicites, l'équation de la tangente passant par le point $M(x_0,y_0)$ de $f(x)$ est $y-\varphi(x_0) = (x-x_0)\varphi'(x_0)$; $a=1\ et\ b=\varphi'(x_0)$;

D'où $\vec{u}(1,\varphi'(x_0))$ est le vecteur directeur de la tangente, et $\vec{n}(-\varphi'(x_0),1)$ est le vecteur normal à la tangente.

4 Généralisation des fonctions implicites

Soit $\begin{array}{c} f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \\ (x,y,z) \to f(x,y,z) \end{array}$ une fonction continûment dérivable dans une partie ouverte U de $\mathbb{R}^3$.

Soit $M(x_0,y_0,z_O)$ un point de U , tel que $f(x_0,y_0,z_0)=0$.

Supposons $\frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)\neq 0$. Il existe deux nombres réels strictement positifs α et β possédant les propriétés suivantes :

- $\forall x\in]x_0-\alpha,x_0+\alpha[,\ \forall y\in]y_0-\alpha,y_0+\alpha[$, l'équation en z de $f(x,y,z)=0$ admet une solution unique dans l'intervalle $]z_0-\beta,z_0+\beta[$.
- Si $z=\varphi(x,y)$ désigne cette solution, la fonction $z=\varphi(x,y)$ est de classe C^1 dans l'intervalle $]x_0-\alpha,x_0+\alpha[x]y_0-\alpha,y_0+\alpha[$.
- On a $d\varphi(x,y)=\dfrac{-\frac{\partial f}{\partial x}(x,\varphi(x,y))}{\frac{\partial f}{\partial z}(x,\varphi(x,y))}dx + \dfrac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,\varphi(x,y))}{\frac{\partial f}{\partial z}(x,\varphi(x,y))}dy$ dans l'intervalle $]x_0-\alpha,x_0+\alpha[x]y_0-\alpha,y_0+\alpha[$.

En admettant les deux premières propriétés, la dernière propriété se démontre en dérivant l'équation $f(x,y,\varphi(x,y))=0$ en fonction de x et de y . En utilisant le théorème des fonctions composées définit dans le cours des dérivées partielles, on a

$f'(x,y,\varphi(x,y)) = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,\varphi(x,y))dx+\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,\varphi(x,y))dy+\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,\varphi(x,y))d\varphi(x,y)$ si $|x-x_0|$ et $|y-y_0|$ sont assez petits, d'où

$$d\varphi(x,y)= - \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,\varphi(x,y))}{\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,\varphi(x,y))}dx - \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,\varphi(x,y))}{\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,\varphi(x,y))}dy$$

5 Équation du plan tangent à la surface

Soit $\begin{array}{c} f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \\ (x,y,z) \to f(x,y,z) \end{array}$ une courbe de classe C^1 dans une partie ouverte U de R^3 telle que $f(x,y,z)=0$ (c'est à dire $z=\varphi(x,y)$). La courbe possède une surface tangente en chaque point de U qui est définie pour trois variables par l'équation générale $(X-x)\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)+(Y-y)\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)+(Z-z)\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 0$

D'où $Z = \varphi(x,y) - \dfrac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,\varphi(x,y))}{\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,\varphi(x,y))}(X-x) - \dfrac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,\varphi(x,y))}{\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,\varphi(x,y))}(Y-y)$

6 Normale au plan tangent à la surface

Soit $\begin{array}{c} f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \\ (x,y,z) \to f(x,y,z) \end{array}$ une fonction de classe C^1 dans une partie ouverte U de R^3 telle que $f(x,y,z)=0$. Pour une fonction de trois variables $f(x,y,z)=0$ (c'est à dire $z=\varphi(x,y)$), c'est presque pareil que pour une fonction de deux variables, l'équation du plan tangent en chaque point $(x,y,z=\varphi(x,y))$ de U est :

$$(X-x)\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)+(Y-y)\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)+(Z-z)\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 0$$.

La normale au plan tangent en tout point $M(x,y,z=\varphi(x,y))$ de U est parallèle au vecteur de coordonnées $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z), \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)$, c'est à dire au $\vec{grad} f$. Ainsi, pour tout déplacement élémentaire de $M(x,y,z)$ sur la surface, on a $df(M)=\vec{grad} f(M).d\vec{M}=0$. La normale en tout point au plan tangent est la perpendiculaire à la surface tangente en ce point.