Les nombres complexes

Table des matières

Ce document de mathématiques a été écrit par Didier VERHILLE.

1. Définition des nombres imaginaires

1.1. Quelques mots sur un nombre mystérieux : la racine carrée de 2

La plus ancienne racine carré apparaît pour la première fois à l'époque des babyloniens pour signifier la notion d’un nombre enfoui dans un autre.

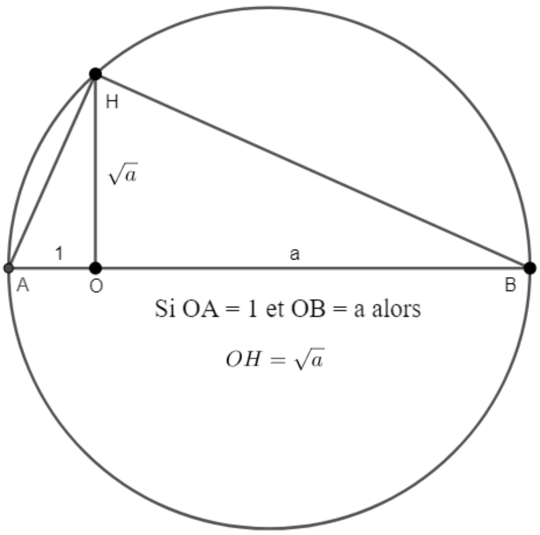
Dans le corps R , $\varphi \ x^2=2 \ \alpha \ x=\pm(\sqrt{2})$

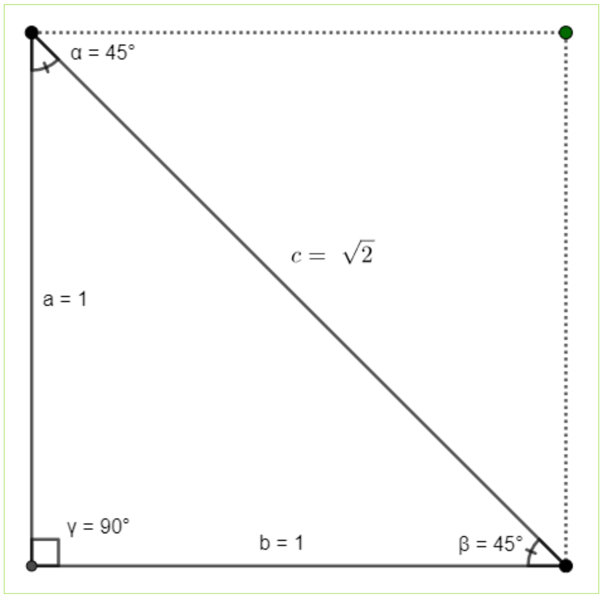
Le nombre 2 est le radicande et $\sqrt{}$ est le radical.

On constate que dans le corps R ,il y a deux racines carrées de 2. L'une est positive et l'autre est négative.

En général, la racine carrée de deux $(\sqrt{2})$ évoque toujours un nombre positif et sa valeur est toujours positive. Dans l'anneau ou le corps des nombres réels, la racine carré de 2 est considérée comme un nombre positif irrationnel.

Selon Pythagore, la $\sqrt{2}$ est la longueur de l’hypoténuse d'un triangle rectangle de côtés de longueurs 1 . Cette longueur est finie.





$c=\sqrt{2}=1{,}4142...$ est un nombre irrationnel. Sa valeur dans R contient une infinité de valeurs décimales pourtant, géométriquement, la longueur de la diagonale est bien finie. On ne peut jamais obtenir la valeur décimale exacte de $\sqrt{2}$. Ainsi, $\sqrt{2}$ n’a pas de valeur réel exacte, mais c’est un nombre qui reste parfaitement déterminé puisque qu’on sait que son carré vaut 2.

$\sqrt{2}=2^{\frac{1}{2}}$ est la longueur de la diagonale du carré unité. En utilisant le théorème de Pythagore, on retrouve bien la longueur de la diagonale d : $1^2+1^2=(d)^2 \Rightarrow d=\sqrt{2}$.

$\sqrt{2}$ est également appelé la constante pythagoricienne.

Quelques résultats avec ce nombre mystérieux :

$(\sqrt{2})^2=2$; $\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\cos(45°)=\sin(45°)$

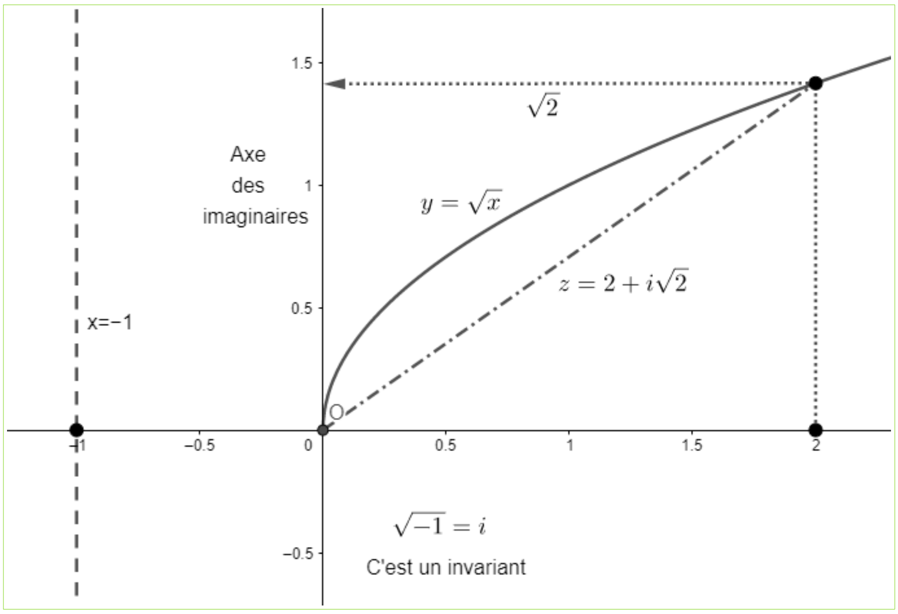
Quelques valeurs approchées de $\sqrt{2}$: $\dfrac{3}{2};\dfrac{7}{5};\dfrac{17}{12};1{,}4142;$

La racine carrée de l’unité est $\sqrt{1}=1$; On a toujours $\sqrt{2}=\sqrt{2}$.

La racine carré d’un nombre positif x est également un nombre positif : $(\forall x\geqslant 0)\in R,\ (\sqrt{x}\geqslant 0)\in R$

Pour $x=2,\ \sqrt{2}>0$

Dans le monde des mathématiques, il n'existe aucun nombre multiplié par lui-même qui donne -1 . Nous allons maintenant introduire un nouveau nombre dont le carré est égal à -1 ($a.a=a^2=-1$).



2. Un bref historique des nombres imaginaires

Historiquement, les nombres complexes ont été considérés comme des quantités imaginaires destinées à aider la résolution des équations. Les nombres imaginaires(du latin IMAGINARIUS), aussi appelés les nombres complexes, sont nés au XVIe siècle. Ils sont composés de deux parties, une partie réelle et une partie imaginaire. La partie imaginaire est composée de la racine carrée d'un nombre négatif. Ces nombres n'existent pas dans la nature. D'ALEMBERT, dans ses mémoires, disait sur les imaginaires : « On appelle ainsi, en algèbre, les racines paires de quantités négatives ». La raison de cette dénomination est que toute puissance paires d'une puissance quelconque, positive ou négative, a nécessairement le signe +, puisque + par +, ou – par –, donnent également +. D'où il s'ensuit que toute puissance paire, tout carré, par exemple, qui a le signe – n'a pas de racine possible et qu'ainsi la racine d'une telle puissance est impossible ou imaginaire. Les quantités imaginaires sont opposés aux quantités réels.

Ainsi, toute quantité imaginaire pouvant s'écrire : $\sqrt{-11}=\sqrt{11.(-1)}=\sqrt{11}\,x\sqrt{-1}$. $\sqrt{-1}$ apparaît comme une entité mystérieuse.

Ce nombre $\sqrt{-1}$, noté i en mathématique et j en électronique, fait parti des nombres imaginaires. Ainsi, par définition, chez les nombres imaginaires, $i^2=-1$, c'est à dire $i=\sqrt{-1}$. i n'est pas un élément naturel. Si les températures étaient des nombres naturelles, il n'y aurait pas de températures en dessous de zéro.

En 1806, Robert ARGAND trouve une représentation géométrique pour les nombre imaginaires. Cette nouvelle représentation géométrique leur donne une nouvelle signification. Une idée simple est de les définir comme les points du plan munis de certaines règles de calcul. Ainsi, un nombre complexe est un couple de points (a, b) du plan. On définit l'addition et la multiplication de couples de points par les formules suivantes :

$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$ $(a,b).(c,d)=(ac-bd,ad+bc)$

C'est en 1777 que le mathématicien Euler a appelé i le nombre imaginaire.

Le zéro est $(0{,}0)$, on le note simplement 0 .
Dans le plan cartésien, le nombre unité sur l'axe des x est $(1{,}0)$, on le note 1 . On pose $i=(0{,}1)$ sur l'axe des y .

3. Forme algébrique d'un complexe

Comme l'équation $x^2+1=0$ n'a pas de solution dans R . On a créé un nombre i vérifiant que $i^2=-1$. Autrement dit, i est racine de cette équation.
$x^2+1=x^2-i^2=(x-i)(x+i)$

Ainsi, il existe un ensemble de nombre, noté C , contenant l'ensemble R des nombres réels. Cet ensemble s'appelle l'ensemble des nombres imaginaires.
Ainsi, l'ensemble des nombres imaginaires s'appelle C . Ces éléments sont de la forme $x+iy$. Dans C , l'équation $x^2+1=0$ a des solutions mais elle en n'a pas dans R . On peut dire que toute équation polynomiale dans C a au moins une solution.

- $N \subset Z \subset D \subset Q \subset R \subset C$

C est muni d'une addition et d'une multiplication qui prolongent l'addition et la multiplication dans R . Ils obéissent aux mêmes règles de calcul que dans R .

C contient un nombre, noté i , tel que $i^2=-1$.

- $\forall z\in C$, $z=x+iy$ Ŏ $(x,y)\in R^2$
- $\forall(z,z')\in C^2$ α $(z+z',z.z')\in C^2$

Théorème

- $\forall(x,y)\in R^2$, φ $x+iy=0$ α $x=y=0$
- $\forall(x,x',y,y')\in R^4$, $x+iy=x'+iy'$ α $x=x'$ $\wedge$ $y=y'$

Ceci devient complètement faux si l'un des nombre x,x',y,y' est complexe.
Ainsi, l'écriture d'un nombre complexe sous la forme $x+iy$ est unique.

Définition

L'écriture d'un nombre complexe sous la forme $z=x+iy$ Ŏ $(x,y)\in R^2$ s'appelle la forme algébrique d'un nombre complexe.

- $\forall(x,y)\in R^2$, le nombre x est la partie réelle de $x+iy$ et le nombre y est la partie imaginaire de $x+iy$. iy n'est pas la partie imaginaire du nombre complexe. C'est bienqui y est la partie imaginaire. C'est un réel.
- φ $z=x+iy$ α $x=\Re(z)$ $\wedge$ $y=\Im(z)$ Ď $z=\Re(z)+i\Im(z)$

Définition

Les nombres complexes dont la partie imaginaire est nulle sont les nombres réels.
Les nombres complexes dont la partie réelle est nulle sont les imaginaires purs.

- $z\in R$ $\Leftrightarrow$ $\Im(z)=0$
- $z\in iR$ $\Leftrightarrow$ $\Re(z)=0$

Remarque : Le nombre $0=(0,0)$ est à la fois réel et imaginaire pur. C'est d'ailleurs le seul nombre complexe à la fois réel et imaginaire pur.

4. Opérations sur les nombres complexes

4.1. Définition des opérations dans C

Définition

On définit l'addition et la multiplication des nombres complexes de la façon suivante :

- $\forall(x,x',y,y')\in R^4$, $(x+iy)+(x'+iy')=(x+x')+i(y+y')$
- $\forall(x,x',y,y')\in R^4$, $(x+iy)\times(x'+iy')=(xx'-yy')+i(xy'+yx')$

Théorème

L'addition et la multiplication dans $\mathbb{C}$ obéissent aux mêmes règles de calcul que dans $\mathbb{R}$:

- $\forall(z,z')\in C^2$, $z+z'=z'+z$ $\wedge$ $z\times z'=z'\times z$, $(+,x)$ sont commutatives.
- $\forall(z,z',z'')\in C^3$, $(z+z')+z''=z+(z'+z'')$ $\wedge$ $(z\times z')\times z''=z\times(z'\times z'')$, (+, x) sont associatives.
- $\forall(z)\in C$, $z+0=z$ $\wedge$ $z\times 1=z$, 0 est l'élément neutre pour l'addition et 1 est l'élément neutre pour la multiplication.
- $\forall(z)\in C$, $z+(-z)=0$, -z est l'opposé de z.
- $\forall(z,z',z'')\in C^3$, $(z+z')\times z''=z\times z''+z'\times z''$, la multiplication est distributive sur l'addition.
- $\forall(z)\in C$, $z\times 0=0$

Théorème

- $\forall(z,z')\in C^2$, $(z+z')^2=z^2+2zz'+z'^2$
- $\forall(z,z')\in C^2$, $(z-z')^2=z^2-2zz'+z'^2$
- $\forall(z,z')\in C^2$, $(z-z')(z+z')=z^2-z'^2$
- $\forall(z,z')\in C^2$, $(z+z')^3=z^3+3z^2z'+3zz'^2+z'^3$
- $\forall(z,z')\in C^2$, $(z-z')^3=z^3-3z^2z'+3zz'^2-z'^3$

4.2. Inverse d'un nombre complexe.

Théorème

- $\forall(x,y)\in R^2$, $(x+iy)(x-iy)=x^2+y^2$

Le nombre $\bar{z}=x-iy$ s'appelle le conjugué du nombre $z=x+iy$

Théorème

- $\forall(z)\in C^x$, $\exists! z'$ | $z\times z'=1$. z' est l'inverse de z ou encore $z'=\frac{1}{z}$
- $\forall(x,y)\in R^{2x}$, φ $z=x+iy\neq 0$ α $\frac{1}{z}=\frac{1}{x+iy}=\frac{x-iy}{(x+iy)(x-iy)}=\frac{x}{x^2+y^2}-i\frac{y}{x^2+y^2}$

Théorème

Dans C , φ $z\times z'=0$, α l'un des deux nombres complexes z ou z' est forcément nul.

A savoir, $i.(-i)=-i^2=1\Rightarrow$ $i=\frac{1}{-i}$ $\vee$ $-i=\frac{1}{i}$

4.3. Équation du premier degré dans C

Soit (E) l'équation $az+b=0$ d'inconnue z.

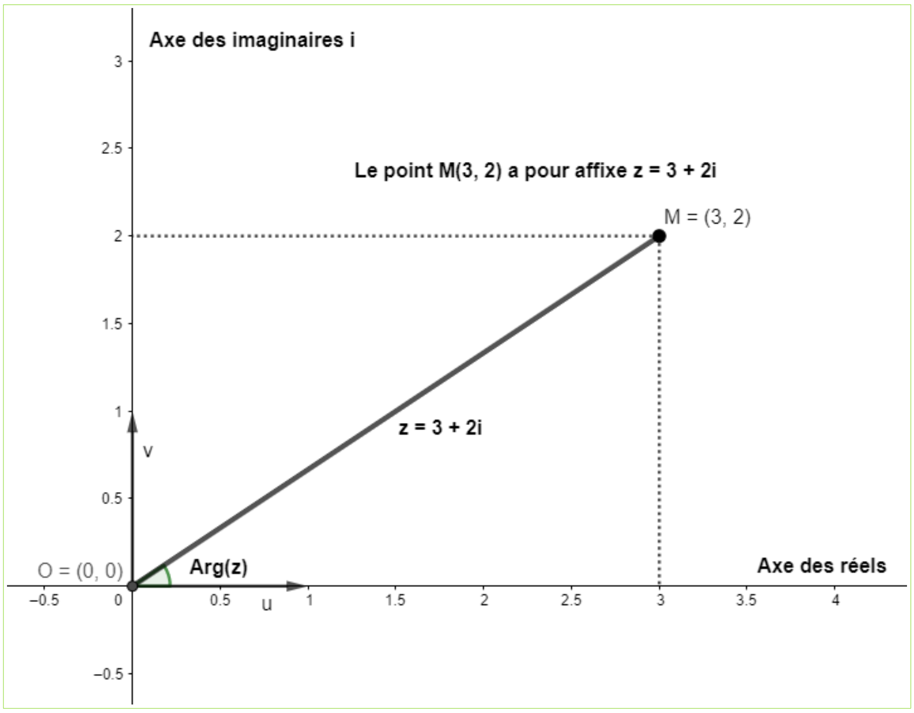
$$az+b=0 \Leftrightarrow az+b-b=0-b \Leftrightarrow az=-b \Leftrightarrow \frac{1}{a}az=\frac{1}{a}(-b) \Leftrightarrow z=\frac{-b}{a}$$

4.4. Représentation géométrique d'un nombre complexe

Soit un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$.

$\forall M(x,y)$, on peut associer le nombre complexe $z_M=x+iy$. On dit que z_M est l'affixe du point M, noté $M(z)$. Inversement, le point $M(x,y)$ est l'image du nombre complexe z_M dans le plan.

$\forall \vec{w}(x,y)$, on peut associer le nombre complexe $z_{\vec{w}}=x+iy$. On dit alors que $z_{\vec{w}}$ est l'affixe du vecteur $\vec{w}$. Inversement, le point $\vec{w}(x,y)$ est l'image vectorielle du nombre complexe $z_{\vec{w}}$ dans le plan.



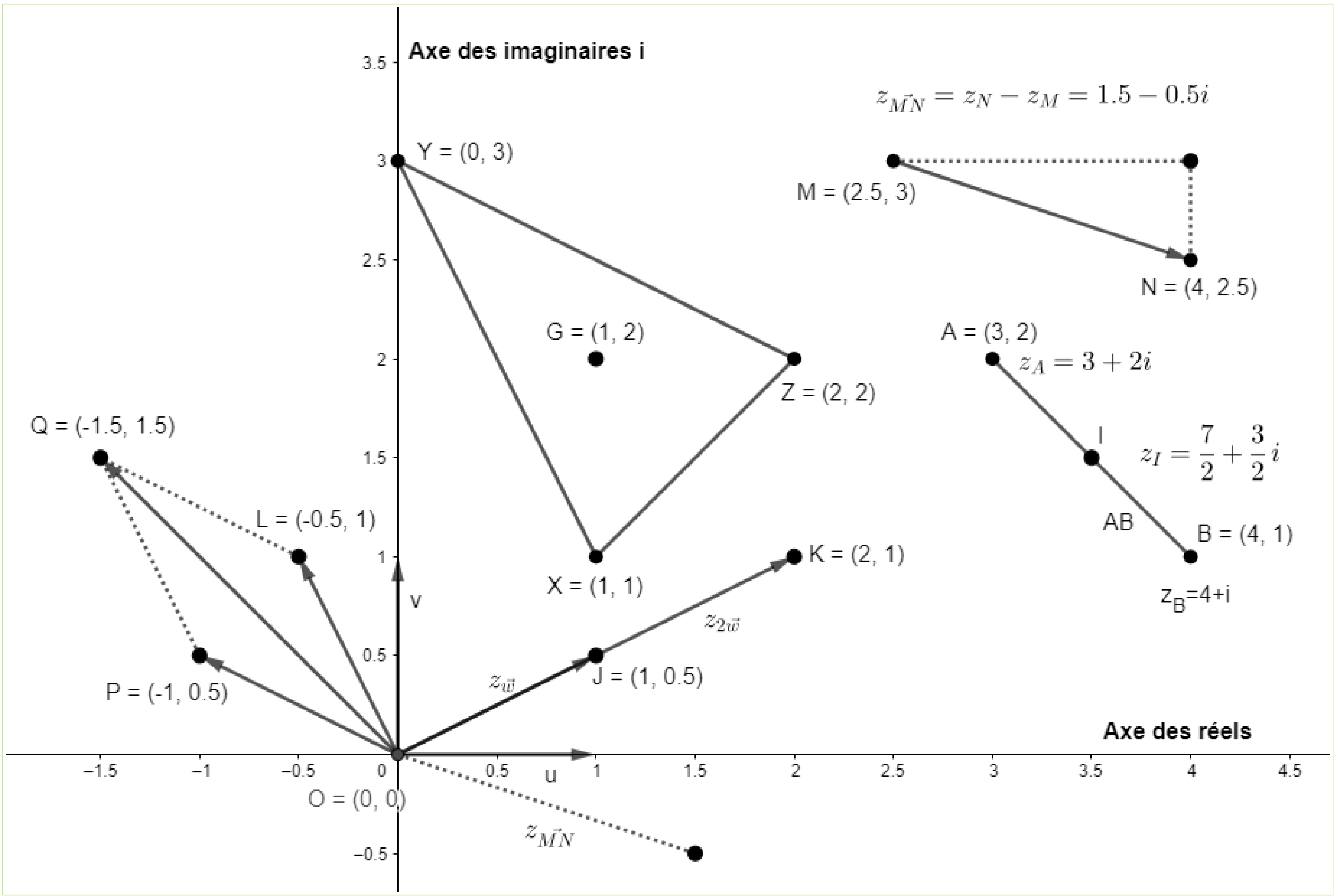
Théorème

Soient A et B deux points du plan complexe. L'affixe z_I du milieu I du segment [AB] est $z_I=\frac{z_A+z_B}{2}$

Soient A, B et C trois points du plan complexe. L'affixe z_G du centre de gravité G du triangle ABC est $z_G=\frac{z_A+z_B+z_C}{3}$

Soient A et B deux points du plan complexe. L'affixe $z_{\vec{AB}}$ du vecteur $\vec{AB}$ est $z_{\vec{AB}}=z_B-z_A$

Soient $\vec{w}$ et $\vec{w}'$ deux vecteurs. L'affixe $z_{\vec{w}+\vec{w}'}$ du vecteur $\vec{w}+\vec{w}'$ est $z_{\vec{w}+\vec{w}'}=z_{\vec{w}}+z_{\vec{w}'}$
Soient $\vec{w}$ un vecteur et k un réel. L'affixe $z_{k\vec{w}}$ du vecteur $k\vec{w}$ est $z_{k\vec{w}}=kz_{\vec{w}}$



4.5. Conjugué d'un nombre complexe

Définition

$\forall(x,y)\in R^2$, $z=x+iy$, le conjugué de z est le nombre $\bar{z}=x-iy=\Re(z)-i\Im(z)$

Théorème

- $\forall(z,z')\in C^2$, $\overline{(z+z')}=\bar{z}+\bar{z'}$
- $\forall(z,k)\in C.R$, $\overline{kz}=k\bar{z}$
- $\forall(z,z')\in C^2$, $\overline{z.z'}=\bar{z}.\bar{z'}$
- $\forall z\in C^x$, $\overline{(\frac{1}{z})}=\frac{1}{\bar{z}}$
- $\forall(z,z')\in CC^x$, $\overline{(\frac{z}{z'})}=\frac{\bar{z}}{\bar{z'}}$
- $\forall(z,n)\in C^x N^x$, $\overline{z^n}=\bar{z}^n$
- $\forall z\in C$, $\bar{\bar{z}}=z$

4.6. Réel et imaginaire pur

Les nombres complexes dont la partie imaginaire est nulle sont les réels. Les nombres complexes dont la partie réelle est nulle sont les imaginaires purs.

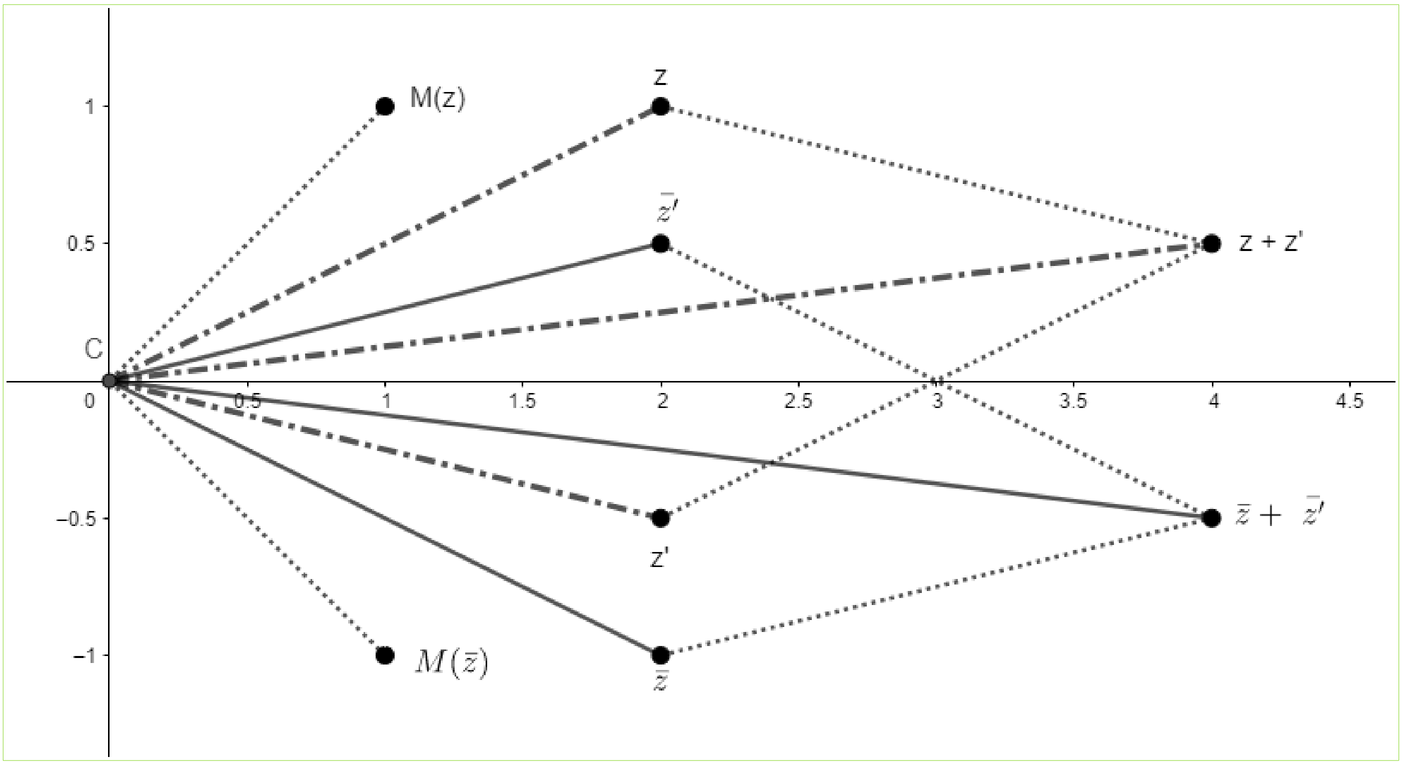
L'ensemble des réels est R . L'ensemble des imaginaires purs, c'est-à-dire l'ensemble des iy où y appartient à R , se note iR .

Théorème

- $\forall z \in C$, $z \in R \Leftrightarrow \bar{z}=z$
- $\forall z \in C$, $z \in iR \Leftrightarrow \bar{z}=-z$

Théorème

- $\forall z \in C$, $z+\bar{z}=2\Re(z) \wedge z-\bar{z}=2i\Im(z)$ $\Rightarrow$ $\Re(z)=\frac{z+\bar{z}}{2}$ $\wedge$ $\Im(z)=\frac{z-\bar{z}}{2i}$
- $\forall(z,z')\in C^2, \Re(z+z')=\Re(z)+\Re(z') \wedge \Im(z+z')=\Im(z)+\Im(z')$
- $\forall(\lambda,z)\in R.C, \Re(\lambda z)=\lambda\Re(z) \wedge \Im(\lambda z)=\lambda\Im(z)$
- $\forall(z,z')\in C^2, |\Re(z)| \leqslant |z| \wedge |\Im(z)| \leqslant |z|$



4.7. Module d'un nombre complexe

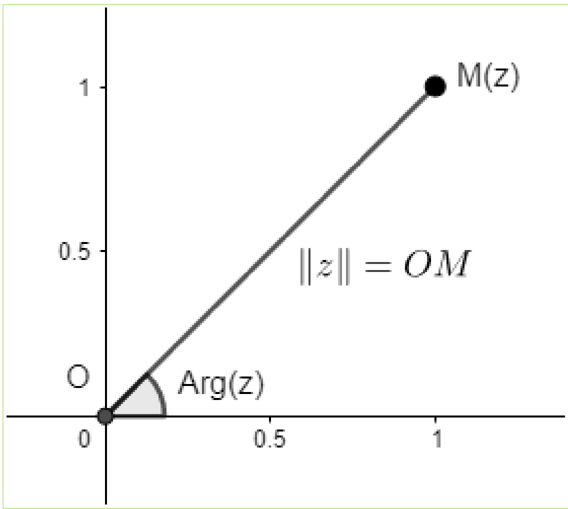
Définition

Soient z un nombre complexe et M le point du plan d'affixe z. Le module du nombre z est le nombre réel positif noté $|z|$ défini par $|z|=OM$

Théorème

- $\forall(x,y)\in R^2$, $z=x+iy$, $|z|=\sqrt{x^2+y^2}\in\mathbb{R}\geq 0$ $\vee$ $|z|=\sqrt{z.\bar{z}}\in\mathbb{R}\geq 0$
- $\forall z\in C^x$, $\forall(x,y)\in RR^x \vee (R^x R)$, $\varphi \quad z=x+iy$ ✔ $\frac{1}{z}=\frac{\bar{z}}{z.\bar{z}}=\frac{\bar{z}}{(|z|^2)}$
- $\varphi \quad x\in C \quad \alpha \quad \sqrt{x} \quad n'existe\ pas$

Le symbole « racine carrée » n'est autorisé que pour les nombres réels. Il n'est pas autorisé pour les nombres complexes.



Théorème

- $\forall A(x_A, y_A) \wedge \forall B(x_B, y_B)\ \alpha\ |AB|=|z_B-z_A|=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$
- $\forall z \in C$, $|z| \geqslant 0$; Il y a des inégalités entre les nombres réels mais il n'y a pas d'inégalités entre les nombres complexes.
- $\forall z \in C$, $|z|=0 \Leftrightarrow z=0$
- $\forall z \in C$, $|\bar{z}|=|-z|=|-\bar{z}|=|z|$
- $\forall (z, z') \in C^2$, $|z.z'|=|z|.|z'|$
- $\forall z \in C^x$, $|\frac{1}{z}|=\frac{1}{|z|}$
- $\forall (z, z') \in C^{2x}$, $|\frac{z}{z'}|=\frac{|z|}{|z'|}$
- $\forall (z, n) \in C^x N^x$, $|z^n|=|z|^n$

4.8. Inégalité triangulaire

Théorème

$\forall (z, z') \in C^2$, $|z+z'| \leqslant |z| + |z'|$

$\forall (z, z') \in C^2$, $|z+z'| = |z| + |z'| \Leftrightarrow z=0 \vee z'=0 \vee \exists \lambda \in R_+^x\ tq\ z'=\lambda z$

5. Équations du 2nd degré à coefficients complexes

5.1. Forme canonique de l'équation du 2nd degré

$\forall (a, b, c) \in R^x.R^2\ (\vee \in C^x C^2)$, $\forall z \in C$, $z \rightarrow az^2+bz+c$

$$az^2+bz+c = a[(z+\frac{b}{2a})^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}] = a[(z+\frac{b}{2a})^2-\frac{\Delta}{4a^2}] = a[(z+\frac{b}{2a})^2-\frac{(\delta)^2}{4a^2}] = a[z+\frac{b}{2a}+\frac{\delta}{2a}][z+\frac{b}{2a}-\frac{\delta}{2a}]$$

$$a[z+\frac{(b+\delta)}{2a}][z+\frac{(b-\delta)}{2a}] = a[z-\frac{(-b-\delta)}{2a}][z-\frac{(-b+\delta)}{2a}] = a[z-z_1][z-z_2]$$

$z_1+z_2=\frac{-b}{a}$, $z_1.z_2=\frac{c}{a}$

5.2. Résolution de l'équation du 2nd degré ; cas particulier, les réels

$\forall (a, b, c) \in R^x R^2$, $\forall z \in C$, résolvons l'équation (E) $az^2+bz+c=0$
Selon le signe du discriminant $\Delta=b^2-4ac$, il y a trois cas possible.

<u>1er cas</u> :

$Si\, \Delta > 0$, l'équation (E) admet deux solutions réels distincts

$z_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ $\wedge$ $z_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

2nd cas :

$Si\,\Delta = 0$, l'équation (E) admet une solution réelle double

$z_1=z_2=\frac{-b}{2a}$

3ème cas :

$Si\,\Delta < 0$, l'équation (E) admet deux solutions réelles conjugués

$z_1=\frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ $\wedge$ $z_2=\frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$

Tout nombre complexe non nul admet dans C deux racines carrées, opposées l'une à l'autre.

6. Argument d'un nombre complexe et sa forme trigonométrique

Définition

$\forall z\in C^x$, un argument de z est une mesure en radian de l'angle orienté $(\vec{u},\vec{OM})$

- $\varphi\ (\vec{u},\vec{OM}) = (\vec{u},0)\ n'existe\ pas\ \Rightarrow\ 0\ n'a\ pas\ d'argument.$

Théorème

- $\forall z\in C^x$, $z = r(\cos(\theta)+i\sin(\theta))\ où\ r\in R_+^x\ \wedge\ \theta\in\mathbb{R}$
- $\forall(r,r')\in R_+^{2x}$, $\forall(\theta,\theta')\in R^2$, $r(\cos(\theta)+i\sin(\theta)) = r'(\cos(\theta')+i\sin(\theta'))\ \Leftrightarrow\ r'=r\ \wedge\ \exists k\in Z\ tq\ \theta'=\theta+2k\pi$

Ainsi, l'écriture d'un nombre complexe sous la forme $z=r(\cos(\theta)+i\sin(\theta))$ est unique. Cette forme s'appelle la forme trigonométrique du nombre complexe non nul z.

$r=|z| > 0\ \wedge\ \theta=arg(z)[2\pi]$

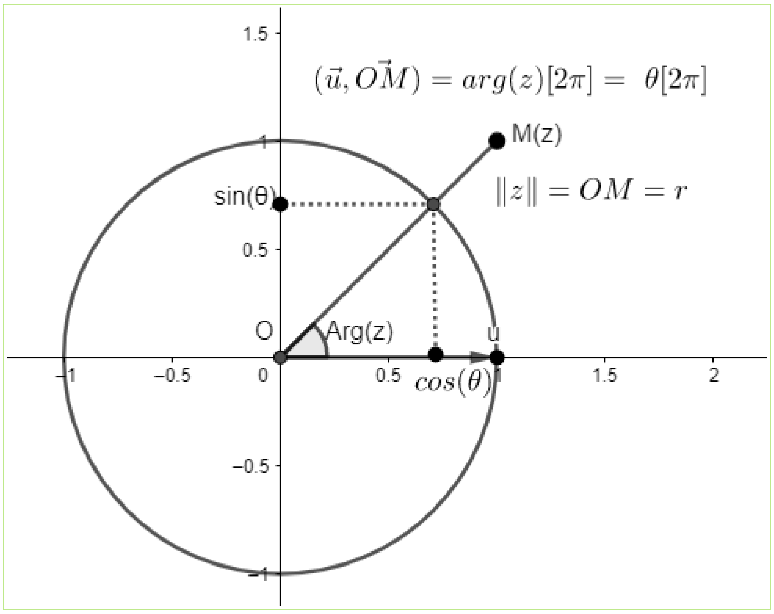
M est le point d'affixe z. Cette écriture est unique, c'est à dire que r et $e^{i\theta}$ sont uniquement définis par z. En revanche θ n'est pas unique. r est le module de z ou encore la distance OM . θ est la mesure de l'angle $(\vec{u},\vec{OM})$ et s'appelle l'argument de z. L'argument de z est noté $arg(z)$.

Unicité de la forme exponentielle se traduit par ceci :

$\forall(\theta,\theta')\in R^2$, $\forall(r,r')\in R^{2x}$, $r.e^{i\theta}=r'.e^{i\theta'}\ \Leftrightarrow\ r=r\ \wedge\ \theta=\theta'+2k\pi$

$\forall(r,r')\in R^{2x}$, $\forall(\theta,\theta')\in R^2$, $z=x+iy=r(\cos(\theta)+i\sin(\theta))$ α $\cos(\theta)=\frac{x}{r}$ $\wedge$ $\sin(\theta)=\frac{y}{r}$

$|z|=\sqrt{x^2+y^2} > 0$



6.1. Écriture sous la forme exponentielle

L'outil fondamental de la trigonométrie est l'exponentielle.

$\forall \theta \in R, \ f(\theta) = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$

$\forall (\theta, \theta') \in R^2, \ f(\theta + \theta') = f(\theta) + f(\theta')$

Comme $f(\theta)$ vérifie la même règle de calcul que l'exponentielle, nous pouvons écrire la forme trigonométrique sous la forme exponentielle.

$\forall \theta \in R, \ e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta) = z$

Quelques propriétés :

$e^{i\pi} = -1$, $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$

Théorème

- $\forall \theta \in R, \ |\ e^{i\theta}\ | = |\ \cos(\theta) + i\sin(\theta)\ | = \sqrt{cos^2(\theta) + sin^2(\theta)} = 1$ $\wedge$ $arg(e^{i\theta}) = \theta[2\pi]$
- $\forall z \in C$, $|z| = 1 \Leftrightarrow \exists \theta \in R \ \ tq \ \ z = e^{i\theta}$

Ainsi on peut dire que $e^{i\theta}$ est un nombre complexe de module 1 et d'argument θ

6.2. Propriétés de calcul sous la forme exponentielle

La forme algébrique est bien adaptée à l'addition et pas à la multiplication. La forme trigonométrique est bien adaptée à la multiplication et pas à l'addition.

Théorème

- $\forall (\theta, \theta') \in R^2$, $e^{i\theta}.e^{i\theta'} = e^{i(\theta + \theta')}$
- $\forall \theta \in R$, $e^{i\theta} \neq 0$, $\frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$
- $\forall (\theta, \theta') \in R^2$, $\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta - \theta')}$
- $\forall (\theta, n) \in R.N$, $(e^{i\theta})^n = e^{i.n.\theta}$, c'est la formule de MOIVRE
- $\forall (z, z') \in C^2$, $arg(z.z') = arg(z) + arg(z')$
- $\forall (z) \in C^2$, $arg(\frac{1}{z}) = -arg(z)[2\pi]$

- $\forall (z,z') \in C^2$, $arg(\frac{z}{z'}) = arg(z) - arg(z')[2\pi]$
- $\forall (z,n) \in C^x.N$, $arg(z^n) = n.arg(z)[2\pi]$
- $\forall \theta \in R$, $\overline{(e^{i\theta})} = e^{-i\theta} = \frac{1}{e^{i\theta}}$
- $\forall \theta \in R$, $-e^{i\theta} = e^{i.(\theta+\pi)}$
- $\forall (z) \in C^x$, $arg(\bar{z}) = -arg(z)[2\pi]$
- $\forall (z) \in C^x$, $arg(-z) = arg(z) + [2\pi]$

La formule de MOIVRE peut également s'écrire sous la forme :
$(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + \sin(n\theta)$

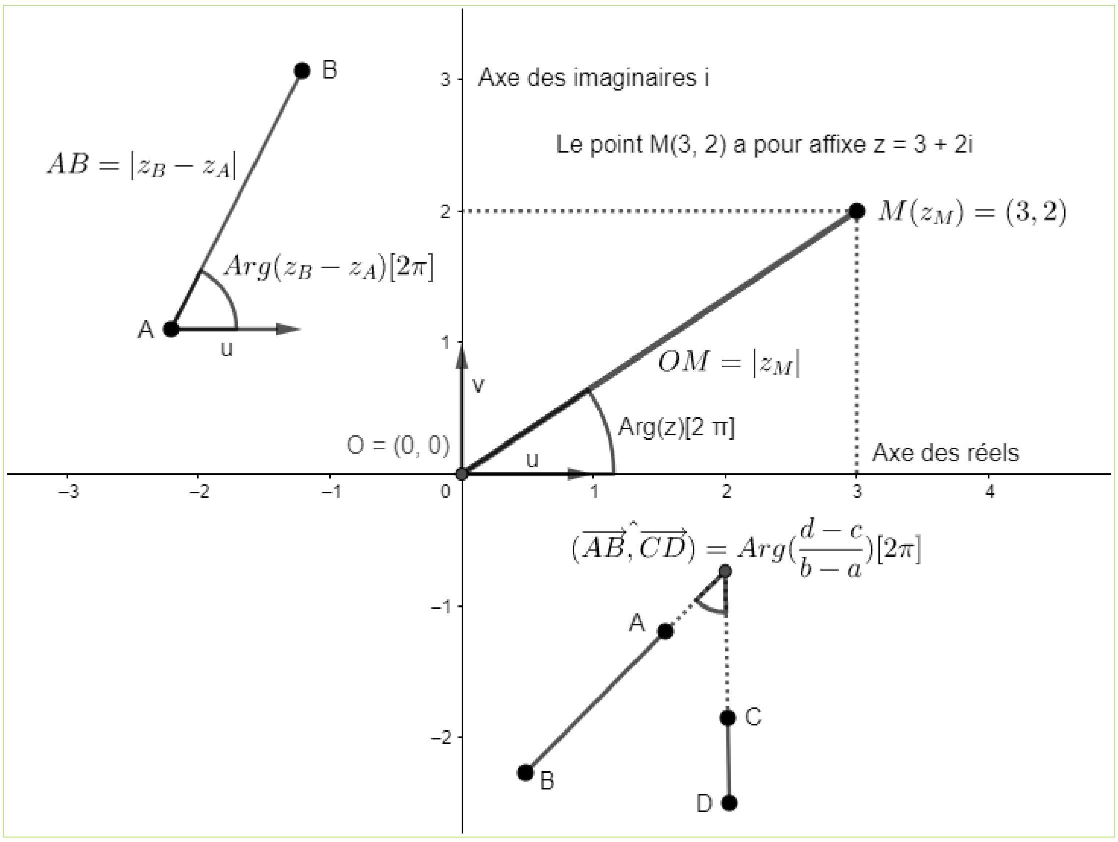
Par récurrence, la formule de MOIVRE est vraie pour toute valeur de n.

6.3. Module et angles

Soient A et B deux points d'affixes z_A et z_B.
$AB = |z_B - z_A|$
φ $A \neq B$, $(\vec{u}, \widehat{\overrightarrow{AB}}) = arg(z_B - z_A)[2\pi]$

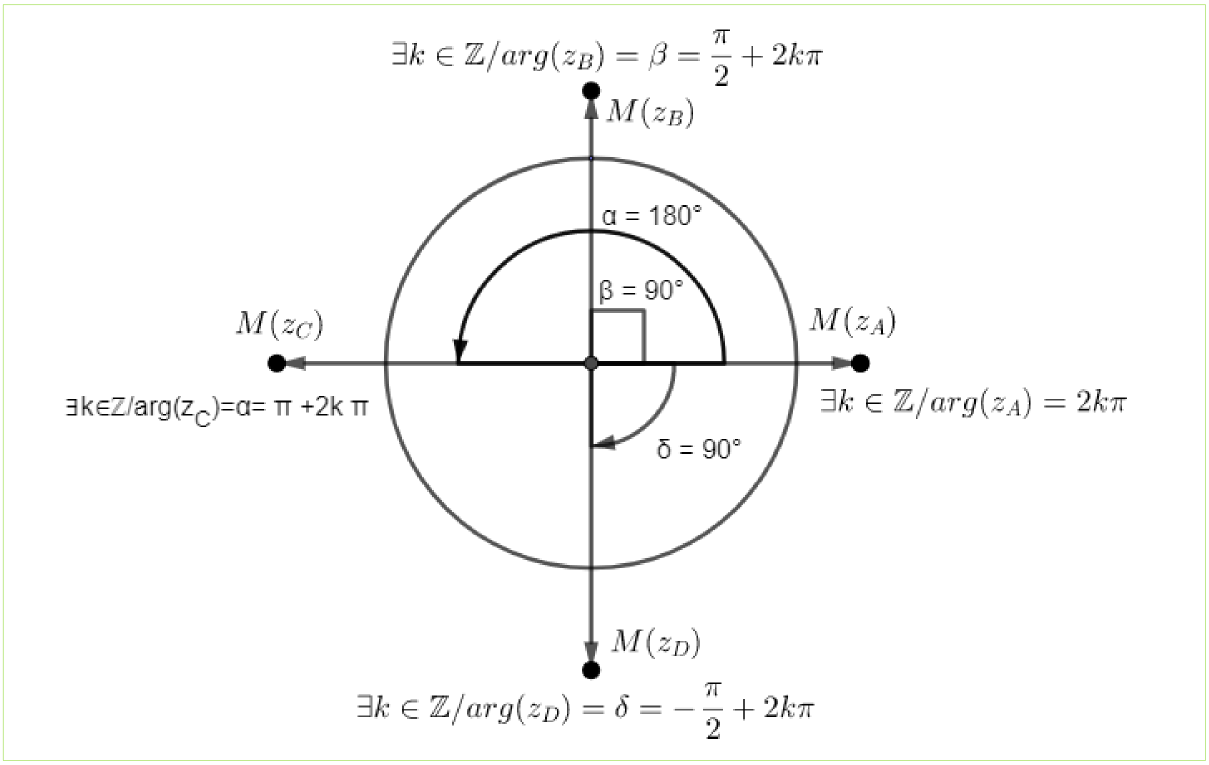
Soient A, B, C et D quatre points d'affixes respectives a, b, c et d tels que
$A \neq B$
$\frac{CD}{AB} = \frac{d-c}{b-a}$

Soient A, B, C et D quatre points d'affixes respectives a, b, c et d tels que
$A \neq B$ et $C \neq D$
$(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}}) = arg(\frac{d-c}{b-a})[2\pi]$



- $\forall (z) \in R$, $z > 0$, $\exists k \in Z$ tq $arg(z) = 2k\pi$
- $\forall (z) \in R$, $z < 0$, $\exists k \in Z$ tq $arg(z) = \pi + 2k\pi$

- $\forall (z)\in R \;,\; z\neq 0 \;,\; \exists k\in Z \;\; tq \;\; arg(z)=k\pi$
- $\forall (z)\in iR \;,\; z=iy \;,\; y > 0 \;,\; \exists k\in Z \;\; tq \;\; arg(z)=\frac{\pi}{2}+2k\pi$
- $\forall (z)\in iR \;,\; z=iy \;,\; y < 0 \;,\; \exists k\in Z \;\; tq \;\; arg(z)=-(\frac{\pi}{2})+2k\pi$
- $\forall (z)\in iR \;,\; z=iy \;,\; y \neq 0 \;,\; \exists k\in Z \;\; tq \;\; arg(z)=\frac{\pi}{2}+k\pi$



Le cercle de centre ω et de rayon R est l'ensemble des points M d'affixe z tels que |z−ω| = r

- $C(\omega ,r)=\{z\in C \;\; tq \;\; |z-\omega|=r\}$

Le disque fermé (respectivement ouvert) de centre ◂ et de rayon r est l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z-\omega| \leqslant r$ (respectivement $|z-\omega| < r$)

- $Df(\omega ,r)=\{z\in C \;\; tq \;\; |z-\omega|\leqslant r\}$
- $Do(\omega ,r)=\{z\in C \;\; tq \;\; |z-\omega|< r\}$

7. L'exponentielle appliquée à la trigonométrie

Nous savons que l'outil fondamental de la trigonométrie est l'exponentielle. On définit de manière générale l'exponentielle d'un nombre complexe indépendamment de toute référence à la trigonométrie.

$\forall z\in C ,\; e^z=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{n!}$ ou encore $\forall \theta\in R ,\; e^{i\theta}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(i\theta)^n}{n!}$

Ainsi, on démontre que $\forall (z,z')\in C^2 ,\; e^z.e^{z'}=e^{z+z'}$, avec cette définition de l'exponentielle, on pourra entièrement reconstruire la trigonométrie à partir de l'exponentielle et pas l'inverse.

7.1. Les formules d'Euler

Nous donnons maintenant les formules exprimant $\cos(\theta),\; \sin(\theta) \;\wedge\; \tan(\theta)$ en fonction de $e^{i.\theta}$. Ces formules sont connues sous le nom de formules d'Euler.

$\forall\theta\in R,\ \cos(\theta)=\frac{1}{2}(e^{i.\theta}+e^{-i.\theta})\ \wedge\ \sin(\theta)=\frac{1}{2i}(e^{i.\theta}-e^{-i.\theta})$

$\forall\theta\in R\backslash(\frac{\pi}{2}+\pi Z),\ \tan(\theta)=\frac{1-e^{-2i\theta}}{i(1+e^{-2i\theta})}$

7.2. Polynôme de Tchebychev

Nous allons donner une expression de $\cos(n\theta)\ \wedge\ \sin(n\theta)\ \textit{en fct de}\ \cos(\theta)\ \wedge\ \sin(\theta)$ $\forall(n,\theta)\in N.R$.

Un polynôme de Tchebychev est un terme de l'une des deux suites de polynômes orthogonaux particulières reliées à la formule de MOIVRE.

Polynômes de Tchebychev de première espèce :

$$T_n(\cos(\theta))=T_n(x)=\cos(n\theta)=\sum(-1)^k\binom{n}{2k}\cos^{n-2k}(\theta)(1-\cos^2(\theta))^k\quad pour\quad 0\leq k\leq\frac{\pi}{2}$$

Polynômes de Tchebychev de seconde espèce :

$$U_n(\cos(\theta))=U_n(x)=\frac{\sin(n\theta)}{\sin(\theta)}=\sum(-1)^k\binom{n}{2k+1}\cos^{n-(2k+1)}(\theta)(1-\cos^2(\theta))^k\quad pour\quad 0\leq k\leq\frac{n-1}{2}$$

La définition classique des polynômes de Tchebychev de première espèce est le plus souvent donnée par la relation de récurrence suivante :

$$T_{n+1}(x)=2xT_n(x)-T_{n-1}(x),\forall n\geqslant 1\quad avec\quad T_0=1\quad et\quad T_1=x$$

Pour le cas T_2

$T_2(x)=2x^2-1,\ \ comme\ \ x=\cos(\theta),\ \ on\ peut\ écrire\ \ \cos(2\theta)=2\cos^2(\theta)-1$

7.3. Linéarisation de polynôme trigonométrique

$\forall(\theta,\theta')\in R^2$, $e^{i\theta}.e^{i\theta'}=e^{i(\theta+\theta')}$

$\forall(\theta,n)\in R.N$, $(e^{i\theta})^n=e^{i.n.\theta}$

$\forall\theta\in R,\ \cos(\theta)=\frac{1}{2}(e^{i.\theta}+e^{-i.\theta})\ \wedge\ \sin(\theta)=\frac{1}{2i}(e^{i.\theta}-e^{-i.\theta})$

En tenant compte de toutes ces formules, on peut linéariser tout polynôme trigonométrique.

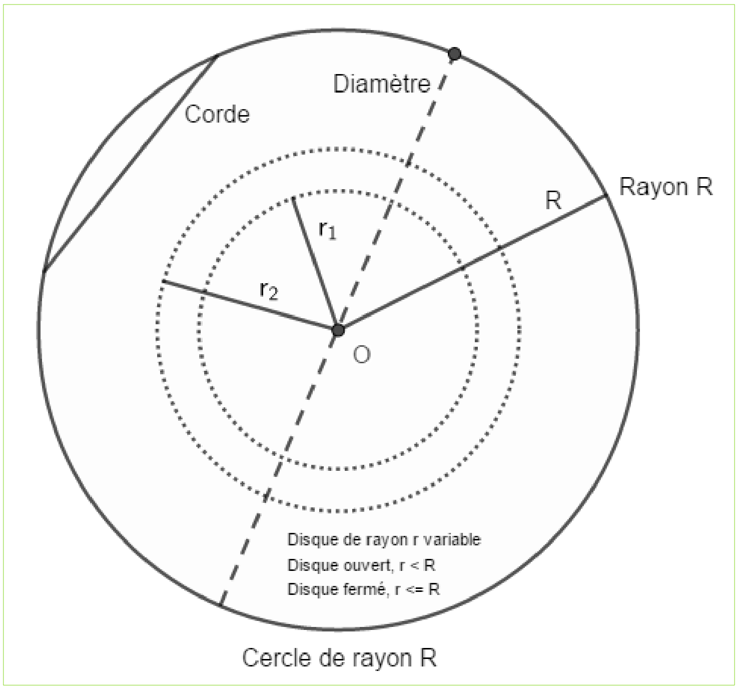
7.4. Cercle et disque

Soit un cercle C de centre ω et de module R, $C(\omega,R)=\{z\in C\ \ tq\ \ |z-\omega|=R\}$

$z\in C(\omega,R)\ \Leftrightarrow\ \exists\theta\in R\ \ tq\ \ z-\omega=R.e^{i.\theta}$ soit $z=\omega+R.e^{i\theta}$

Pour un disque fermé, $Df(\omega,R)=\omega+r.e^{i\theta}\ \ tq\ \ (r,\theta)\in R_+.R$

Et pour un disque ouvert, $D_o(\omega,R)=\omega+re^{i\theta}\ \ tq\ \ (r,\theta)\in R_+^x\ R$



8. Racine n-ième d'un nombre complexe

8.1. Racine n-ième de l'unité

$\forall n \in N^x$, les racines n-ième de l'unité dans C sont les nombres complexes z de la forme $z^n = 1$. On note U_n l'ensemble des racines n-ième de l'unité.

$U_n = \{\forall n \in N^x,\ z \in C \ \ tq \ \ z^n = 1\}$

Le module de $z^n = 1$ est :

$|z^n| = 1 \ \Leftrightarrow \ |z|^n = 1 \ \Leftrightarrow \ |z| = \sqrt[n]{1} \ \Leftrightarrow \ |z| = 1$ ainsi $\forall n \in N$ pour le module, $U_n \subset U$

Si on pose $z = e^{i.\theta}$ alors $z^n = 1 \ \Leftrightarrow \ (e^{i.\theta})^n = 1 \ \Leftrightarrow \ (e^{i.n.\theta}) = 1 \ \Leftrightarrow \ \exists k \in Z \ \ tq \ \ n\theta = 2k\pi \ \Leftrightarrow \ \theta = \frac{2k\pi}{n}$

Ainsi, on peut écrire que $U_n = \{\forall n \in N^x, z \in C \ \ tq \ \ z^n = 1\} = \{e^{\frac{(2ki\pi)}{n}} \ ,\ k \in Z\}$

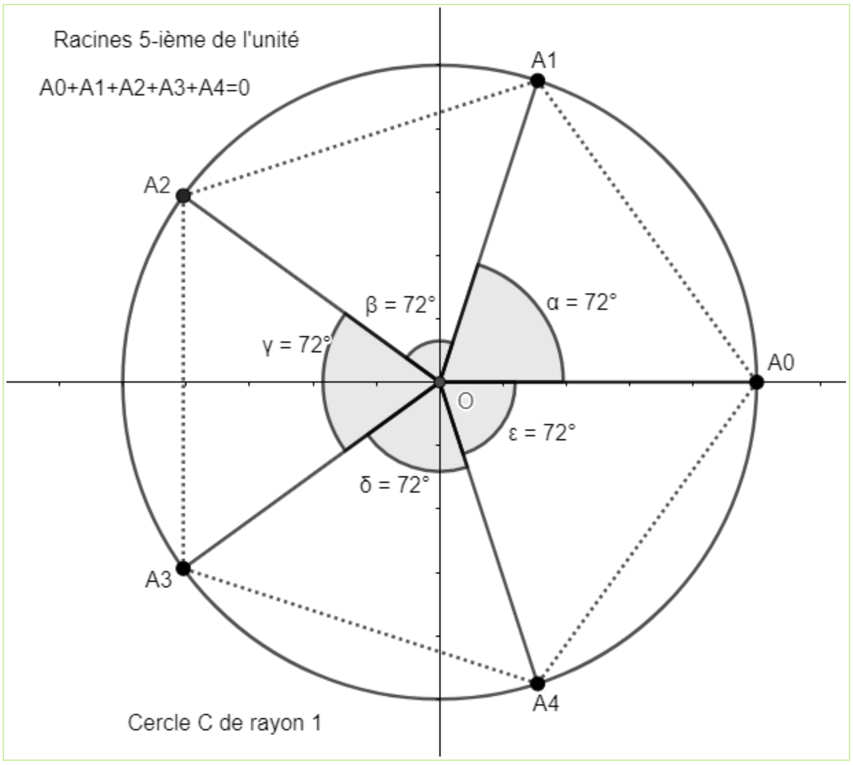
Combien de racines n-ièmes deux à deux distinctes possède le nombre 1 dans l'ensemble C ?

Le nombre complexe 1 admet dans C exactement n racines n-ièmes deux à distinctes à savoir les nombres de la forme :
$e^{\frac{2ki\pi}{n}} \ ,\ k \in [0, n-1]$

$\forall (k, l) \in Z^2, \frac{e^{2ik\pi}}{n} = \frac{e^{2il\pi}}{n} \ \Leftrightarrow \ \exists q \in Z \ \ tq \ \ \frac{2k\pi}{n} = \frac{2il\pi}{n} + 2q\pi \ \Leftrightarrow \ \exists q \in Z \ \ tq \ \ k = l + nq \ \Leftrightarrow \ k \equiv l[n]$

eg : Racines 5-ième de l'unité

$U_5 = \{1 \ , \ e^{\frac{1.2i\pi}{5}} \ , \ e^{\frac{2.2i\pi}{5}} \ , \ e^{\frac{3.2i\pi}{5}} \ , \ e^{\frac{4.2i\pi}{5}}\}$



Les images des racines 5-ième de l'unité dans le plan forme un pentagone inscrit dans un cercle de centre 0 est de rayon 1.

Rappelons que pour deux points A et B dans le plan, l'affixe du vecteur $\vec{AB}$ est $z_{\vec{AB}} = z_B - z_A$

La longueur d'un côté du pentagone inscrit dans le cercle C est $|A0A1| = |A1A2| = |A2A3| = |A3A4| = |A4A0|$

Soit $|A0A1| = |z_{A1} - z_{A0}| = |e^{\frac{1.2i\pi}{5}} - 1| = 2\sin(\frac{\pi}{5})$

Théorème

$\forall n \geqslant 2$, la somme des racines n-ième de l'unité est toujours nulle.

Théorème

$\forall n \geqslant 2$, la longueur des côtés du polygone régulier convexe de n cotés inscrits dans un cercle de centre O et de rayon 1 est égale à $2.\sin(\frac{\pi}{n})$.

Et l'angle au sommet du polygone est égale à $\frac{(n-2)\pi}{n}$.

8.2. Racine n-ième d'un nombre complexe

$\forall n \in N$, l'équation $z^n = 0$ admet une unique solution ou une seule racine n-ième z=0.

$\forall (z, z') \in C^2$, pour résoudre l'équation $z^n = z'$, il faut poser

$z' = r e^{i\theta}$ Ŏ $r \in R_+^x \ \wedge \ \theta \in R$

$z^n = z' \Leftrightarrow z^n = r \ e^{i\theta} = w^n$

On pose $w = \sqrt[n]{r}.e^{\frac{i\theta}{n}}$

$z^n = w^n \Leftrightarrow (\frac{z}{w})^n = 1 \Leftrightarrow \exists k \in Z \ tq \ \frac{z}{w} = e^{\frac{2ik\pi}{n}} \Leftrightarrow z = \sqrt[n]{r} e^{\frac{i\theta}{n}}.e^{\frac{2ik\pi}{n}}$

Théorème

- $Soit\ n\in N^x$, tout nombre complexe non nul admet exactement n racines n-ièmes deux à deux distinctes.
- $\varphi\ z^n=r\,e^{i\theta}\ Ǒ\ (r,\theta)\in R_+^x\,.R$, les racine n-ièmes de de z sont les nombres complexes de la forme $z=\sqrt[n]{r}\,e^{\frac{i\theta}{n}}.e^{\frac{2ik\pi}{n}}\quad avec\quad k\in[0,n-1]$
- On obtient toutes les racines n-ièmes d'un nombre complexe non nul en multipliant l'une d'entre elles par les racines n-ièmes de l'unité.

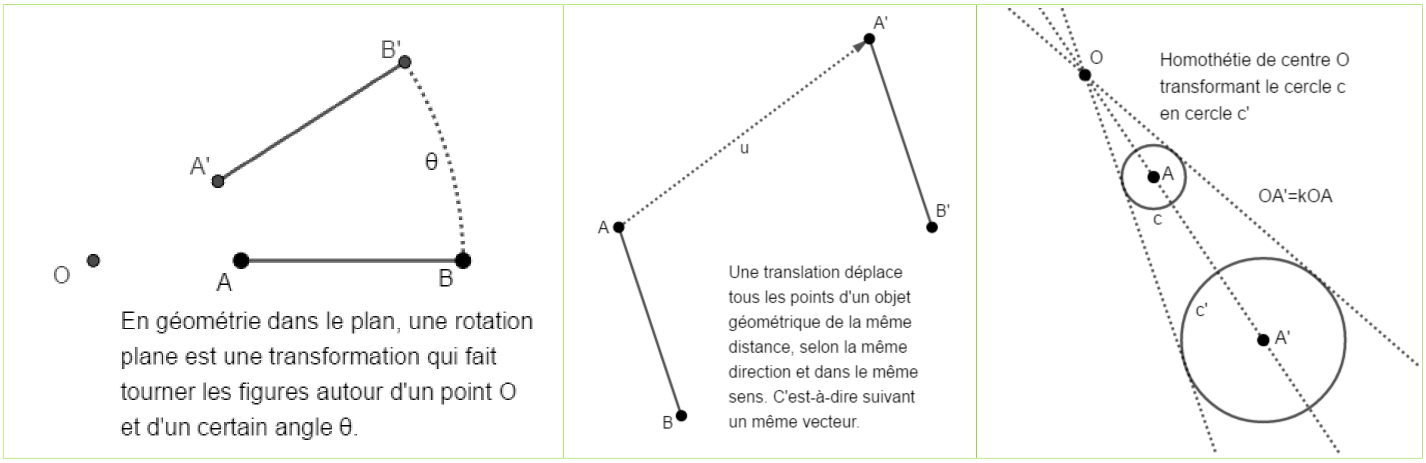
9. Similitude dans le plan

En géométrie euclidienne, une similitude est une transformation qui multiplie toutes les distances par une constante fixe. L'image de toute figure par une telle application est une figure semblable, c'est-à-dire intuitivement de même forme mais pas de la même taille.

Une homothétie est une transformation géométrique correspondant à un agrandissement ou à une réduction . Soit un point invariant O et $soit\,k\in R^x$, on appelle homothétie de rapport k et de centre O, la transformation qui à tout point M du plan associe les points M' tel que $OM'=k.OM$

Les isométries sont des cas particuliers de similitudes. Ce sont des transformations qui conservent les distances.

La similitude est la composition d'une isométrie avec une homothétie. Ceux qui conservent l'orientation, ce sont des similitudes directes, les autres ce sont des similitudes indirectes.



9.1. Translation

Une translation est une correspondance entre les points d'un plan P définie à partir d'un vecteur.

$\forall (M,M')\in P^2, t_{\vec{u}}(M)=M' \Leftrightarrow \vec{MM'}=\vec{u}$

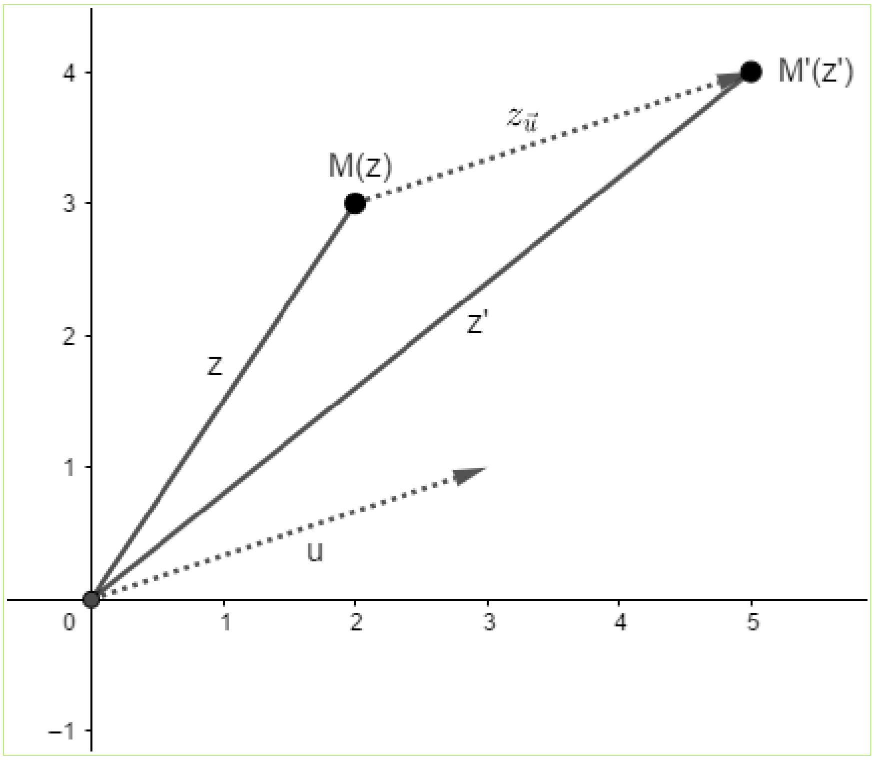
$t_{\vec{u}}$ est la translation de vecteur $\vec{u}$

Théorème

- $\forall(\vec{u},\vec{v})\in P^2\ ,\ t_{\vec{u}}\circ t_{\vec{v}}=t_{\vec{u}+\vec{v}}$
- $\forall\vec{u}\in P\ ,\ t_{\vec{u}}:P\to P\ est\ une\ bijection,\ et\ (t_{\vec{u}})^{-1}=t_{-\vec{u}}$

on note $z,\ z'\ et\ z_{\vec{u}}\ les\ affixes\ respectifs\ de\ M,\ M'\ et\ \vec{u}$, on a $z'=z+z_{\vec{u}}$

z' est l'expression complexe de la translation de vecteur $\vec{u}$



9.2. Homothétie

Je vous rappelle qu'une homothétie est une transformation géométrique correspondant à un agrandissement ou à une réduction . Soit un point invariant Ω et $soit\ k \in R^x$, l'homothétie de rapport k et de centre Ω est une application

$$\begin{array}{c} h: P \to P \\ \Omega M \to \Omega M' = k\Omega M \end{array}$$

Ainsi on peut écrire, $h_{\Omega,k}(M) = M' \Leftrightarrow \Omega M' = k\Omega M$

Théorème

$Soient\ \ \Omega \in P\ \ et\ \ (k, k') \in R^{2x}\ \ ,\ \ h_{\Omega,k} \circ h_{\Omega,k'} = h_{\Omega,kk'}$;

$Soient\ \ \Omega \in P\ \ et\ \ k \in R^x\ \ ,\ \ h_{\Omega,k} : P \to P\ est\ une\ bijection\ \ et\ \ h_{\Omega,k}^{-1} = h_{\Omega,\frac{1}{k}}$

$Soient\ \ \Omega \in P\ \ d'affixe\ \ \omega\ \ et\ \ k \in R^x,\ \ l'expression\ \ complexe\ \ est\ \ z' = \omega + k(z - \omega)$

Cette expression complexe est du type $z' = az + b$ où b est un nombre complexe et a un réel.

$Soient\ \ \Omega \in P\ \ et\ \ k \in R^x\ \ ,\ \ si\ \ k = 1,\ \ h_{\Omega,k} = Id_P$

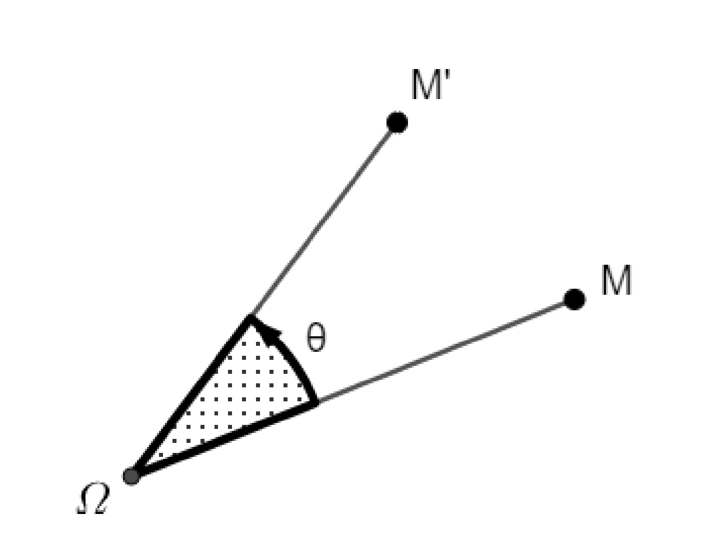
$Soient\ \ \Omega \in P\ \ et\ \ k \in R^x\ \ ,\ \ si\ \ k \neq 1,\ \ h_{\Omega,k}\ \ admet\ \ un\ \ point\ \ invariant\ \ et\ \ un\ \ seul,\ \ son\ \ centre\ \ \Omega$

9.3. Rotation

Une rotation plane est une correspondance entre les points du plan qui a besoin, pour être définie, un centre de rotation, d’un angle de rotation et un sens de rotation.

Le seul point du plan qui a pour correspondance lui-même est le centre de rotation : il est dit invariant.

$Soient\ \ \Omega \in P\ \ et\ \ \theta \in R$, soit M un point du plan différent de Ω, nous notons $M' = r_{\Omega,\theta}(M)$ la rotation du point M de centre Ω et d’angle θ.



$$M'=r_{\Omega,\theta}(M) \Leftrightarrow \Omega M'=\Omega M \ \text{ et } \ (\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega M'})=\theta\,[2\pi] \Leftrightarrow |z'-\omega|=|z-\omega| \ \text{ et } \ arg(\frac{z'-\omega}{z-\omega})=\theta\,[2\pi]$$
$$\Leftrightarrow z'=\omega+\mathrm{e}^{i\theta}(z-\omega)$$

z' est le nombre complexe de la rotation de centre Ω et d'angle θ. Cette expression complexe est du type $z'=az+b$ où b est un nombre complexe et a un réel.

Théorème

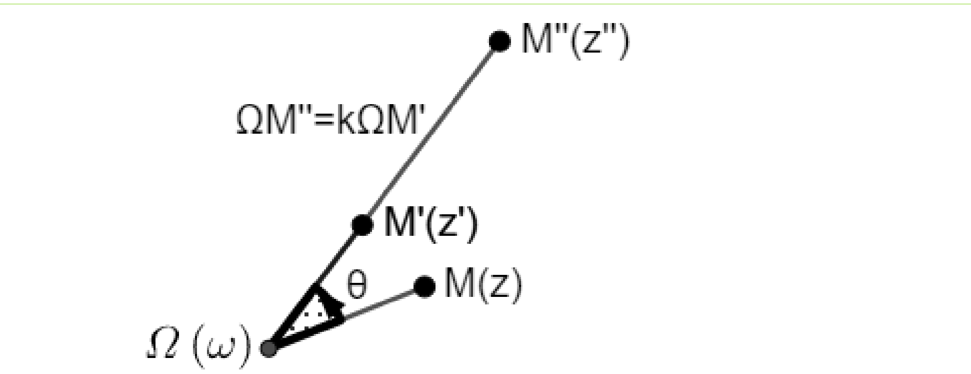
$$\textit{Soient } \ \Omega\in P \ \text{ et } \ (\theta,\theta')\in R^{2x} \ , \ r_{\Omega,\theta}\circ r_{\Omega,\theta'}=r_{\Omega,\theta+\theta'}$$
$$\textit{Soient } \ \Omega\in P \ \text{ et } \ \theta\in R^{x} \ , \ r_{\Omega,\theta}:P\rightarrow P \text{ est une bijection } \ \text{ et } \ r_{\Omega,\theta}^{-1}=r_{\Omega,-\theta}$$

$$\textit{Soient } \ \Omega\in P \ \text{ et } \ \theta\in R^{x} \ , \ \textit{si } \ \theta\in 2\pi Z, \ r_{\Omega,\theta}=Id_P$$
$$\textit{Soient } \ \Omega\in P \ \text{ et } \ \theta\in R^{x} \ , \ \textit{si } \ \theta\notin 2\pi Z, \ r_{\Omega,\theta} \ \textit{admet un point invariant et un seul, son centre } \ \Omega$$

10. Étude des transformations $z\rightarrow az+b$

Deux triangles d'angles semblables sont similaires. Ils sont de mêmes formes. Ils sont reliés l'un de l'autre.

$$\textit{Soient } \ \Omega\in P, \ k\in R^{x} \ \text{ et } \ \theta\in R \ \textit{ tel que } \ k\,\mathrm{e}^{i\theta}\notin\{0,1\}$$
L'expression complexe de la similitude $s_{\Omega,k,\theta}$ de centre Ω, de rapport k et d'angle θ est $z''=\omega+k\,\mathrm{e}^{i\theta}(z-\omega)$



z, z', z'' et ω sont les affixes des points M, M', M'' et Ω

Soient a et b deux nombres complexes ; soit $\begin{array}{l} f:P\rightarrow P \\ z\rightarrow az+b \end{array}$

Si $a=0$, f est constante.
Si $a=1$, f est la translation de vecteur d'affixe b.
Si $a\notin\{0,1\}$, f est la similitude de centre Ω d'affixe $\omega=\frac{b}{1-a}$ (invariant : $z=az+b$), de rapport $k=|a|$ et d'angle $\theta=arg(a)[2\pi]$
Si $a\neq 1$, f a un unique point invariant.
Si $a\in R$, f est une homothétie.
Si $|a|=1$, f est une rotation.

11. Exponentielle d'un nombre complexe

$\forall z\in C,\ e^{z}=e^{\Re(z)}e^{i\Im(z)}=e^{\Re(z)}(\cos(\Im(z))+i.\sin(\Im(z)))$
Partie réelle : $e^{\Re(z)}\cos(\Im(z))$
Partie imaginaire : $e^{\Re(z)}\sin(\Im(z))$

$\forall z\in C,\ e^{z}\neq 0$
$\forall z\in C,\ |e^{z}|=e^{\Re(z)}$
$\forall z\in C,\ arg(e^{z})=\Im(z)[2\pi]$

$\forall(z,z')\in C^{2},\ e^{z}=e^{z'}\ \Leftrightarrow\ \exists k\in Z\ /\ z'=z+2ik\pi$
$\forall z\in C,\ e^{z}=1\ \Leftrightarrow\ z\in 2i\pi Z$

$\forall(z,z')\in C^{2},\ e^{z}e^{z'}=e^{z+z'}$
$\forall z\in C,\ e^{z}\neq 0\ et\ \frac{1}{e^{z}}=e^{-z}$
$\forall(z,z')\in C^{2},\ \frac{e^{z}}{e^{z'}}=e^{z-z'}$
$\forall z\in C,\forall n\in Z,\ (e^{z})^{n}=e^{nz}$

$\begin{matrix}C\rightarrow C\\ z\rightarrow e^{z}\end{matrix}$ n'est pas injective
$\begin{matrix}R\rightarrow R\\ x\rightarrow e^{x}\end{matrix}$ est injective
$\begin{matrix}C\rightarrow C^{x}\\ z\rightarrow e^{z}\end{matrix}$ est surjective

Si $Z\in C$, la solution dans C de l'équation $e^{z}=Z$ et $z=\ln(|Z|)+i(arg(Z))+2ik\pi\ \ où\ \ k\in Z$, on dit que z est le logarithme de Z.

Dérivée de e^{z} : $\forall z\in C,\ (e^{z})'=z'e^{z}$

Cosinus et sinus hyperbolique :
$\forall z\in C,\ ch(z)+sh(z)=e^{z}\ \ et\ \ ch(z)-sh(z)=e^{-z}$
Nous en déduisons que $ch(z)=\frac{e^{z}+e^{-z}}{2}\ \ et\ \ sh(z)=\frac{e^{z}-e^{-z}}{2}$

Et, $\cos(z)=ch(iz)$, $\sin(z)=\frac{1}{i}sh(iz)$, ces formule expliquent l'analogie entre les fonctions hyperboliques et les fonctions circulaires.
$\cos(z)+i.\sin(z)=e^{iz},\ \cos(z)-i\sin(z)=e^{-iz}$
$\cos(z)=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2},\ \sin(z)=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$

12. L'outil fondamental de la trigonométrie

$\forall x \in R,\ e^{ix} = \cos(x) + i.\sin(x)$ est l'outil fondamental de la trigonométrie.

Ses propriétés fondamentales sont les suivantes :

$\forall x \in R,\ |e^{ix}| = 1$

$\forall x \in R,\ e^{ix} \neq 0$

$$\forall x \in R,\ \overline{e^{ix}} = e^{-ix} = \frac{1}{e^{ix}}$$

$$\forall x \in R,\ \cos(x) = \Re(e^{ix}) = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$$

$$\forall x \in R,\ \sin(x) = \Im(e^{ix}) = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$$

$$\forall x \in R / \{\frac{\pi}{2} + \pi Z\},\ tg(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{i(e^{ix} + e^{-ix})}$$

$$\forall x \in R / \{\pi Z\},\ cotg(x) = \frac{i(e^{ix} + e^{-ix})}{(e^{ix} - e^{-ix})}$$

13. Le nombre j chez les nombres complexes

$$Par\ \ définition,\ j = e^{\frac{2i\pi}{3}} = \cos(\frac{2\pi}{3}) + i.\sin(\frac{2\pi}{3}) = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$j^2 = e^{\frac{4i\pi}{3}} = \bar{j} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$j^3 = 1$

$1 + j + j^2 = 0$

$\forall n \in Z,\ j^{3n} = 1,\ j^{3n+1} = j,\ j^{3n+2} = j^2$