# Nappes paramétrées dans l'espace

## Table des matières



***Ce document de mathématiques a été rédigé par Didier VERHILLE.***

Dans ce document, je vais vous donner quelques rudiments de mathématiques concernant les surfaces paramétrées régulières. Comme dans le cas des courbes paramétrées, la notion d'espace tangent est liée à la différentielle première et la forme de la surface est donnée par la différentielle seconde.

## 1.Définition d'une nappe paramétrée

Une application $\begin{matrix} M: I \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \\ (u,v) \to M(u,v) \end{matrix}$ définie et continûment dérivable sur un intervalle ouvert $I$ de $\mathbb{R}^2$ s'appelle une surface paramétrée, on dit aussi une nappe paramétrée. Les variables $u$ et $v$ s'appellent les paramètres de la nappe.

L'ensemble des points $M(u,v)$ , où le couple $(u,v)$ décrit l'ensemble $I$ de $\mathbb{R}^2$ , s'appelle support de la nappe. On notera $S$ cet ensemble de points $M(u,v)$ .

Soit la base $B=\{O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ dans $\mathbb{R}^3$ , alors les coordonnées dans la base $B$ du point $M(t)$ sont $M(u,v)=(f(u,v),g(u,v),h(u,v))$ .

On dit que l'ensemble des points $M(u,v)$ de $S=\{M(u,v) \ / \ (x,y,z)\in\mathbb{R}^3\}$ de la surface paramétrée sont définis par les équations :

$x=f(u,v)$ , $y=g(u,v)$ et $z=h(u,v)$ .

Si l'application $(u,v)\to M(u,v)$ est continue, on dit que l'on a une surface paramétrée continue.

Si l'application $(u,v)\to M(u,v)$ est dérivable, on dit que l'on a une surface paramétrée dérivable.

Pour que la surface soit continue, respectivement dérivable, il faut et il suffit que les applications $f(u,v)$ , $g(u,v)$ et $h(u,v)$ soient continues, respectivement dérivables.

### Reparamétrisation des nappes paramétrées

Comme dans le cas des courbes paramétrées, il est possible de reparamétrer les surfaces paramétrées. Soit les applications $\begin{matrix} M: I\subset\mathbb{R}^2\rightarrow\mathbb{R}^3 \\ (u,v)\rightarrow M(u,v)\end{matrix}$ et $\begin{matrix} \varphi: J\subset\mathbb{R}^2\rightarrow I\subset\mathbb{R}^2 \\ (u,v)\rightarrow \varphi(u,v)\end{matrix}$ définies et continûment dérivables sur leurs intervalles ouverts respectifs $I$ et $j$ de $\mathbb{R}^2$, alors $\begin{matrix} M\circ\varphi: J\subset\mathbb{R}^2\rightarrow\mathbb{R}^3 \\ (u,v)\rightarrow M\circ\varphi(u,v)\end{matrix}$ est une surface paramétrée qui a le même support que $M(u,v)$. L'application $\varphi(u,v)$ est un changement de variable et $M\circ\varphi(u,v)$ une reparamétrisation de $M(u,v)$.

Rappel : Difféomorphisme entre ouverts de $\mathbb{R}^n$

Soient $I\subset E$ et $J\subset F$ deux intervalles ouverts de $\mathbb{R}^2$ ;

Soit l'application $f: I\subset E\rightarrow J\subset F$ ;

On dit que l'application $f$ est un difféomorphisme si les trois propriétés suivantes sont vérifiées :

- $f$ est bijective ;
- $f$ est différenciable sur $I$ ;
- $f^{-1}$ est différenciable sur $J$.

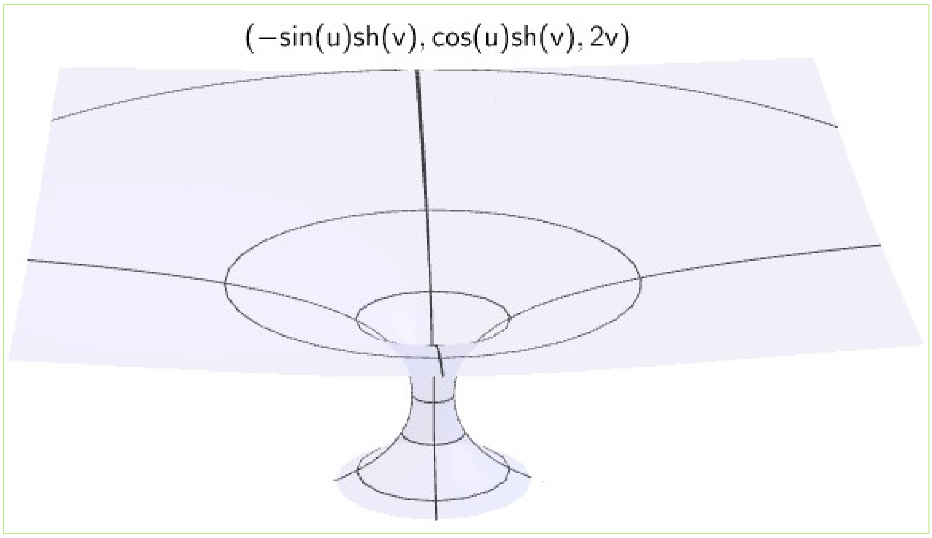
S'il existe une telle application $f$ alors les ensembles $E$ et $F$ sont de même dimension ; par exemple, prenons $E=F=\mathbb{R}^n$. Dans cet exemple, on dit qu'ils sont isomorphes.

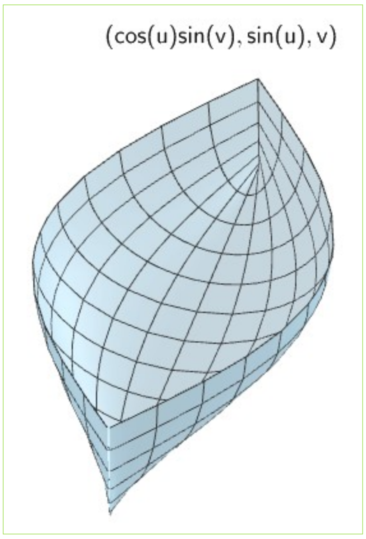
Pour $\forall k\in\mathbb{N},\ 1\leqslant k\leqslant\infty$, un $C^k-\textit{difféomorphisme}$ est une fonction $f$ de classe $C^k$ bijective et dont sa réciproque est aussi de classe $C^k$.

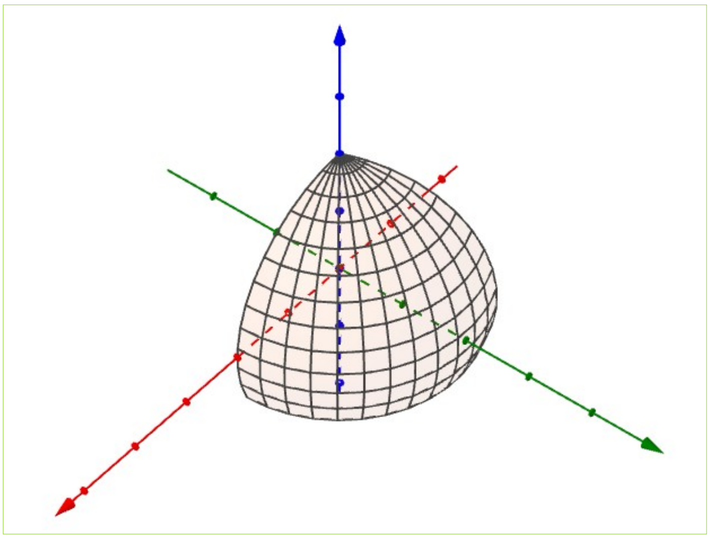
### Courbes coordonnées

Si l'on fixe l'un des deux paramètres, par exemple $v=v_0$, alors l'application $\begin{matrix} M: I\subset\mathbb{R}^2\rightarrow\mathbb{R}^3 \\ (u,v_0)\rightarrow M(u,v_0)\end{matrix}$ est une courbe paramétrée dont tous les points sont des points appartenant à la surface paramétrée. En faisant varier $v_0$ dans l'intervalle ouvert $I$ de $\mathbb{R}^2$, on a une famille de courbes paramétriques $\Gamma_{(v_0)}$. De même, si l'on fixe $u=u_0$, on a une autre famille de courbes paramétrées $\Gamma_{(u_0)}$. La réunion des deux familles de courbes paramétrées $\Gamma_{(v_0)}\cup\Gamma_{(u_0)}$ est appelée courbes coordonnées de la surface paramétrique.

Voici quelques exemples de courbes coordonnées de surfaces paramétrées :



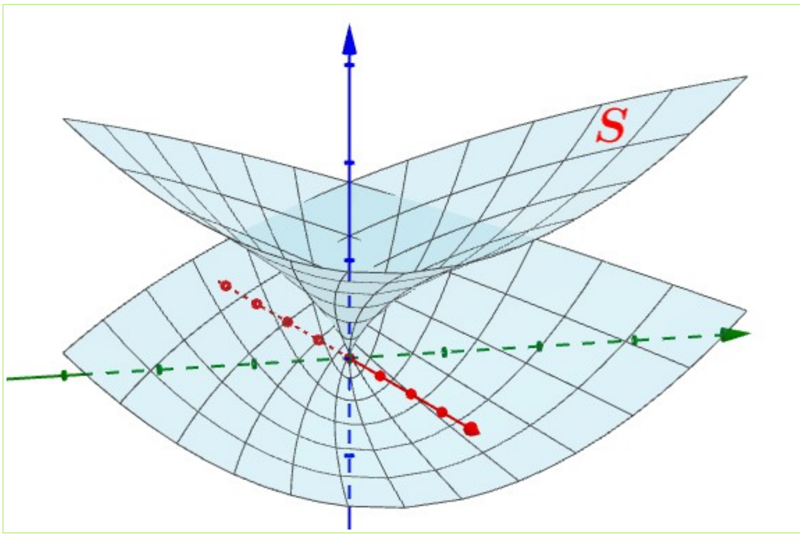
Les courbes que l'on voit tracées sur les surfaces paramétrées ci-dessus correspondent à des $u$ puis à des $v$ constants.

Une surface paramétrée définit par l'application $(u,v)\rightarrow(u,v,h(u,v))$ a pour ensemble de points le graphe de l'application $h(u,v)$ . Toutes les notions définies sur les surfaces paramétrées peuvent s'appliquer aux graphes des applications réelles $h(u,v)$ de deux variables.

### Un autre exemple de nappes paramétrées

Soit $(S)$ une surface paramétrée ayant pour application

$$M:I\subset\mathbb{R}^2\rightarrow\mathbb{R}^3$$
$$(u,v)\rightarrow M(u,v)=(u^2,2uv,v^2-2u)$$




Les courbes que l'on voit tracées sur la surface paramétrée $(S)$ ci-dessus correspondent à des $u$ puis à des $v$ constants.

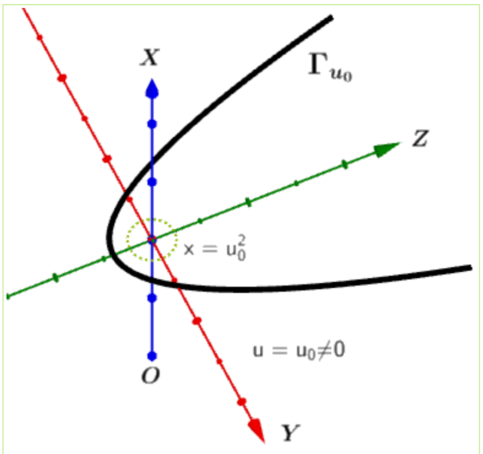
- Courbes à $u$ constant.

Pour $u=u_0$ , on a une courbe contenue dans le plan $yOz$ car $x=f(u_0,v)=u_0^2$ .

On a également $y=g(u_0,v)=2u_0 v$ et $z=h(u_0,v)=v^2-2u_0$ .

Si $u=u_0=0$ , on a $x=y=0$ et $z=h(u_0,v)=v^2$ , la courbe est contenue sur le demi-axe $Oz$ .

Si $u=u_0\neq 0$ , la courbe de paramètre $v$ se projette sur le plan $yOz$ de hauteur $x=u_0^2$ . Son application paramétrique en $u=u_0$ est $\begin{matrix} M: I\subset\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}^2 \\ (v)\rightarrow M(v)=(y=2u_0 v, z=v^2-2u_0) \end{matrix}$ . Cette courbe n'est rien d'autre que l'équation cartésienne de la parabole $z=\dfrac{y^2}{4u_0^2}-2u_0$ .

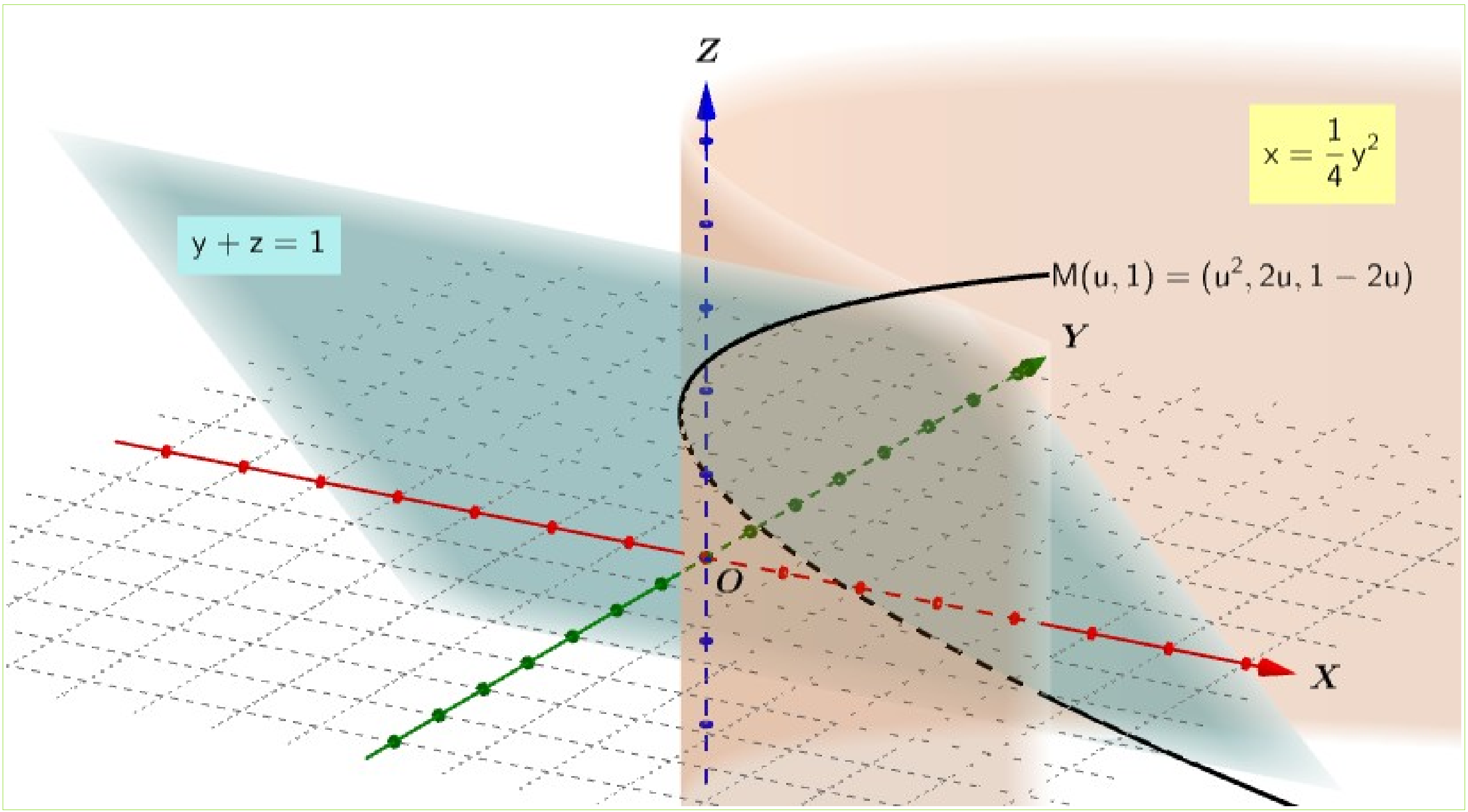



- Courbes à $v$ constant.

Pour $v=v_0=1$ , la nappe paramétrée a pour application $\begin{matrix} M: I\subset\mathbb{R}^2\rightarrow\mathbb{R}^3 \\ (u,1)\rightarrow M(u,1)=(u^2,2u,1-2u) \end{matrix}$ .

Des équations $x=u^2$ , $y=2u$ , $z=1-2u$ , on peut en déduire $y+z=1$ ; c'est l'équation d'une surface plane dans le repère canonique $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ; Et $x=u^2=\dfrac{y^2}{4}$ , c'est l'équation d'une surface parabolique sur $z$ dans le repère canonique $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ .

La courbe paramétrée à un seul paramètre $u$ est une parabole sur la surface plane $y+z=1$ d'équation $x=\frac{1}{4}y^2$ .

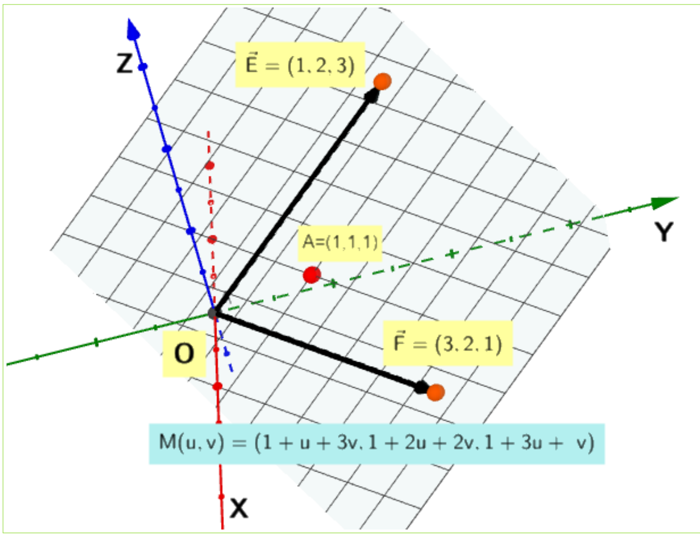



### Vecteurs et plan parallèle

Soient deux vecteurs libres $\vec{E}=(e_1,e_2,e_3)$ , $\vec{F}=(f_1,f_2,f_3)$ et un point $A=(x_0,y_0,z_0)$ .

La surface paramétrée $M(u,v)=(x_0+e_1u+f_1v,\ y_0+e_2u+f_2v,\ z_0+e_3u+f_3v)$ est un plan parallèle aux deux vecteurs $\vec{E}$ et $\vec{F}$ et passant par le point $A$ .

Exemple : $\vec{E}=(1,2,3)$ , $\vec{F}=(3,2,1)$ et $A=(1,1,1)$ .



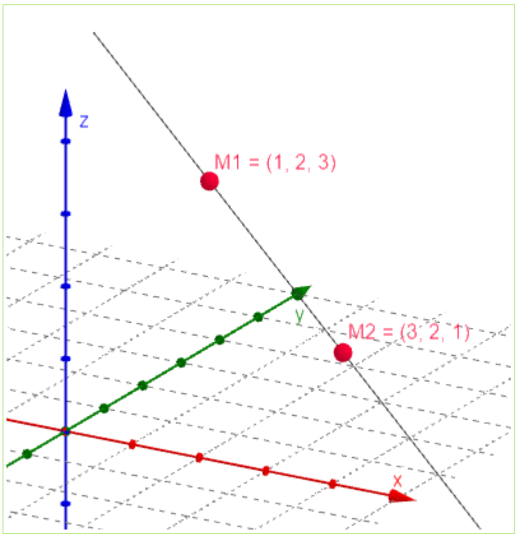

### Une droite passant par deux points

Soient deux points $M_1(x_1,y_1,z_1)$ et $M_2(x_2,y_2,z_2)$ .

Soit la nappe paramétrée $M(u,v)=(\frac{x_1u+x_2v}{u+v},\frac{y_1u+y_2v}{u+v},\frac{z_1u+z_2v}{u+v})$ pour $u+v\neq0$ .

Alors l'ensemble des points $M(u,v)$ est la droite passant par les deux points $M_1(x_1,y_1,z_1)$ et $M_2(x_2,y_2,z_2)$ .

Exemple : $M_1=(1,2,3)$ , $M_2=(3,2,1)$ et $M(u,v)=(\frac{u+3v}{u+v},\frac{2u+2v}{u+v},\frac{3u+v}{u+v})$ .

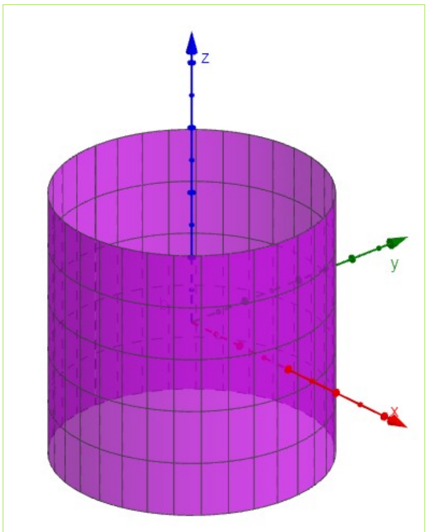


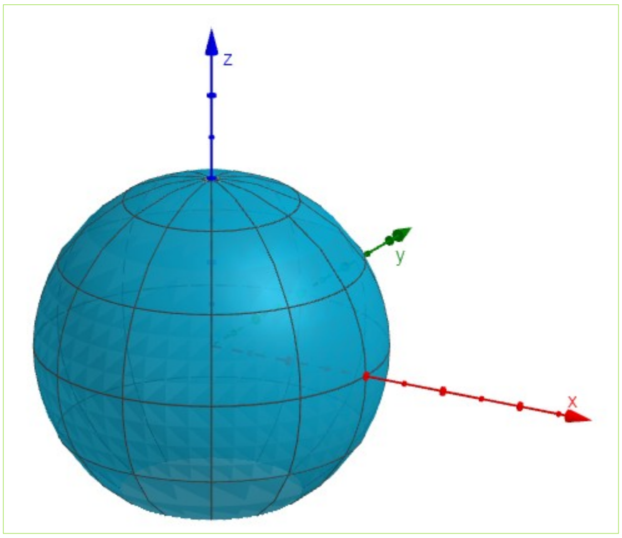

### L'équation cartésienne de la sphère et du cylindre

Une nappe paramétrée définit dans un intervalle ouvert $I$ de $\mathbb{R}^2$ par l'application $M:(\varphi,\theta)\rightarrow M(\varphi,\theta)=(R\cos(\varphi)\cos(\theta),R\cos(\varphi)\sin(\theta),R\sin(\varphi))$ avec $R>0$ représente la surface d'une sphère de rayon $R$ et de centre $O(0,0,0)$ . Son équation cartésienne est de la forme $x^2+y^2+z^2=R^2$ .

Les lignes coordonnées de la surface paramétrée sont les méridiens et les parallèles de la sphère. L'axe $Oz$ est la ligne des pôles.

Une nappe paramétrée définit dans un intervalle ouvert $I$ de $\mathbb{R}^2$ par l'application $M:(u,v)\rightarrow M(u,v)=(R\cos(u),R\sin(u),v)$ avec $R>0$ représente la surface d'un cylindre de rayon $R$ et d'axe $Oz$ . Son équation cartésienne est de la forme $x^2+y^2=R^2$ .

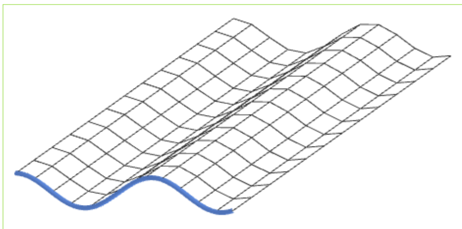


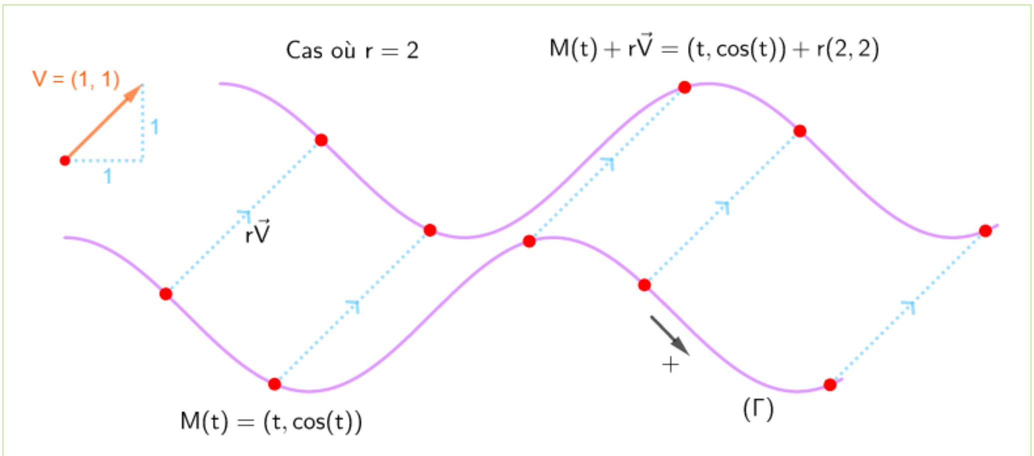




### Représentation d'un cylindre ayant pour directrice une courbe

Soient une courbe paramétrée $(\Gamma)$ définit sur un intervalle ouvert $I$ de $\mathbb{R}$ par l'application $\begin{matrix} M:I\subset\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}^3 \\ (t)\rightarrow M(t)=(f(t),g(t),h(t)) \end{matrix}$ et un vecteur directionnel $\vec{V}=(a,b,c)$ non nul. Quel est la représentation d'un cylindre de directrice la courbe paramétrée $(\Gamma)$ et de génératrice parallèle au vecteur $\vec{V}$ ?

Pour définir une représentation paramétrique d'un cylindre de directrice $(\Gamma)$ et de génératrice parallèle au vecteur $\vec{V}$, il faut que les points du cylindre soient de la forme $M(t)+r\vec{V}$ où $r$ est un paramètre constant.






L'équation de la forme $M(t)+r\vec{V}=(f(t)+ra, g(t)+rb, h(t)+rc)$ constitue une représentation paramétrique du cylindre avec comme paramètres $t$ et $r$.

Les courbes coordonnées pour différentes valeurs de $t=cst$ sont les génératrices du cylindre.

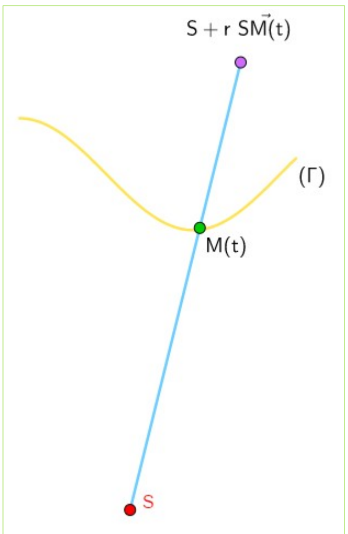
Les courbes coordonnées pour différentes valeurs de $r=cst$ sont les courbes de directrice $(\Gamma)$.

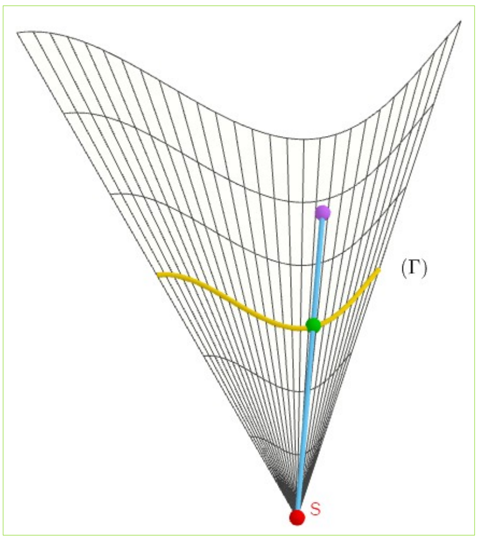
### Représentation d'un cône de directrice une courbe

Soient une courbe paramétrée $(\Gamma)$ définit sur un intervalle ouvert $I$ de $\mathbb{R}$ par l'application $\begin{matrix} M: I\subset\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}^3 \\ (t)\rightarrow M(t)=(f(t),g(t),h(t)) \end{matrix}$ et $S$ un point de coordonnées $(s_0,s_1,s_2)$ tel que $S\notin(\Gamma)$. Quel est la représentation d'un cône de directrice la courbe paramétrée $(\Gamma)$ et de sommet le point de coordonnées $S$ ?

Pour définir la représentation d'un cône de directrice la courbe paramétrée $(\Gamma)$ et de sommet le point de coordonnées $S$, il faut que les points de la droite $SM(t)$ soit des points de la forme :

$$S+r\vec{SM}(t)=(s_0+r(f(t)-s_0), s_1+r(g(t)-s_1), s_2+r(h(t)-s_2))$$



L'équation de la forme $S+r\vec{SM}(t)=(s_0+r(f(t)-s_0),s_1+r(g(t)-s_1),s_2+r(h(t)-s_2))$ constitue une représentation paramétrique du cylindre avec comme paramètres $t$ et $r$ .

Les courbes coordonnées pour différentes valeurs de $t=cst$ sont les génératrices du cylindre.

Les courbes coordonnées pour différentes valeurs de $r=cst$ sont les courbes déduites par les homothéties de centre $S$ .

## 2.Plan tangent sur une surface paramétrée

Soit une application $\begin{matrix} M: I\subset\mathbb{R}^2\rightarrow\mathbb{R}^3 \\ (u,v)\rightarrow M(u,v)\end{matrix}$ définie et continûment dérivable sur un intervalle ouvert $I$ de $\mathbb{R}^2$ telle que $M(u,v)=(f(u,v),g(u,v),h(u,v))$ .

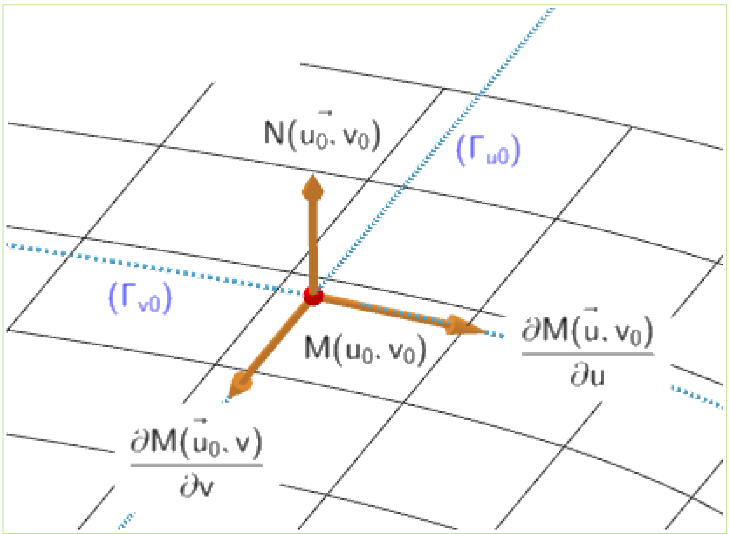
Soit le point $(u_0,v_0)\in I$ ; les courbes coordonnées $(\Gamma_{(u_0)})$ et $(\Gamma_{(v_0)})$ pour $u=u_0$ puis pour $v=v_0$ sont définies par les équations suivantes :

$(\Gamma_{(u_0)})$ : $M(u_0,v)=(f(u_0,v),g(u_0,v),h(u_0,v))$ et $(\Gamma_{(v_0)})$ : $M(u,v_0)=(f(u,v_0),g(u,v_0),h(u,v_0))$ .

On suppose que chacune de ces courbes admet une tangente non nulle.

Les dérivées des deux courbes coordonnées sont :

$$\frac{\partial M(\vec{u},v_0)}{\partial u}=(\frac{\partial f(u,v_0)}{\partial u},\frac{\partial g(u,v_0)}{\partial u},\frac{\partial h(u,v_0)}{\partial u}) \text{ et } \frac{\partial M(u_0,\vec{v})}{\partial v}=(\frac{\partial f(u_0,v)}{\partial v},\frac{\partial g(u_0,v)}{\partial v},\frac{\partial h(u_0,v)}{\partial v})$$




Théorème

Supposons que les deux vecteurs dérivés sont linéairement indépendants. Soit le plan affine $(P)$ contenant le point $M(u_0,v_0)$ ainsi que les deux vecteurs libres $\frac{\partial M(\vec{u},v_0)}{\partial u}$ et $\frac{\partial M(u_0,\vec{v})}{\partial v}$ .

Le plan tangent est le plan affine qui passe par $M(u_0,v_0)$ et dont la direction est $vect(\frac{\partial M(\vec{u},v_0)}{\partial u},\frac{\partial M(u_0,\vec{v})}{\partial v})$ , c'est-à-dire :

$$M(u_0,v_0)+vect(\frac{\partial M(\vec{u},v_0)}{\partial u},\frac{\partial M(u_0,\vec{v})}{\partial v})=\{M(u_0,v_0)+\lambda\frac{\partial M(\vec{u},v_0)}{\partial u}+\mu\frac{\partial M(u_0,\vec{v})}{\partial v},(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\}$$

La normal à la surface $(S)$ au point $M(u_0,v_0)$ est la perpendiculaire au plan tangent qui passe par le point $M(u_0,v_0)$ . Cette normale au point de coordonnées $M(u_0,v_0)$ est dirigée par le vecteur $\vec{N}(u_0,v_0)$ définit par le produit vectoriel $\vec{N}(u_0,v_0)=\frac{\partial \vec{M}(u,v_0)}{\partial u}\wedge\frac{\partial \vec{M}(u_0,v)}{\partial v}$ .

Exemple de vecteur normal à une sphère

Une nappe paramétrée définit dans un intervalle ouvert $I$ de $\mathbb{R}^2$ par l'application $M:(\varphi,\theta)\to M(\varphi,\theta)=(R\cos(\varphi)\cos(\theta),R\cos(\varphi)\sin(\theta),R\sin(\varphi))$ avec $R>0$ représente la surface d'une sphère de rayon $R$ et de centre $O(0,0,0)$ .

Les dérivées de la surface paramétrée $M(\varphi,\theta)$ en $\varphi$ et en $\theta$ sont :

$$\frac{\partial \vec{M}(\varphi,\theta)}{\partial\varphi}=(-R\sin(\varphi)\cos(\theta),-R\sin(\varphi)\sin(\theta),R\cos(\varphi))$$

$$\frac{\partial \vec{M}(\varphi,\theta)}{\partial\theta}=(-R\cos(\varphi)\sin(\theta),R\cos(\varphi)\cos(\theta),0)$$

La normale à la surface $(S)$ de la sphère au point $M(u_0,v_0)$ est définie par le produit vectoriel $\vec{N}(\varphi,\theta)=\frac{\partial \vec{M}(\varphi,\theta)}{\partial\varphi}\wedge\frac{\partial \vec{M}(\varphi,\theta)}{\partial\varphi}=\begin{pmatrix}-R\sin(\varphi)\cos(\theta)\\-R\sin(\varphi)\sin(\theta)\\R\cos(\varphi)\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}-R\cos(\varphi)\sin(\theta)\\R\cos(\varphi)\cos(\theta)\\0\end{pmatrix}$

Soit $\vec{N}(\varphi,\theta) = \begin{pmatrix}-R^2\cos^2(\varphi)\cos(\theta)\\-R^2\cos^2(\varphi)\sin(\theta)\\-R^2\sin(\varphi)\cos(\varphi)\cos^2(\theta)-R^2\sin(\varphi)\cos(\varphi)\sin^2(\theta)\end{pmatrix} = -R\begin{pmatrix}\cos^2(\varphi)\cos(\theta)\\\cos^2(\varphi)\sin(\theta)\\\sin(\varphi)\cos(\varphi)\end{pmatrix}$

C'est-à-dire $\vec{N}(\varphi,\theta) = -R\cos(\varphi)\begin{pmatrix}\cos(\varphi)\cos(\theta)\\\cos(\varphi)\sin(\theta)\\\sin(\varphi)\end{pmatrix} = -R\cos(\varphi)\vec{OM}(\varphi,\theta)$

$$\|\vec{N}(\varphi,\theta)\| = \|R\cos(\varphi)\|$$

En particulier aux deux pôles, la normale est $\vec{N}(\varphi,\theta)=0$ car l'angle $\varphi$ est égal à $\pm\frac{\pi}{2}$ . Il y a pourtant un plan tangent en ce point, mais il ne peut pas être défini comme on le souhaite.

### Équation du plan tangente

Supposons que les deux vecteurs dérivés $\frac{\partial \vec{M}(u,v_0)}{\partial u}$ et $\frac{\partial \vec{M}(u_0,v)}{\partial v}$ sont linéairement indépendants. Soit le plan affine $(P)$ contenant le point $M(u_0,v_0)$ ainsi que les deux vecteurs libres $\frac{\partial \vec{M}(u,v_0)}{\partial u}$ et $\frac{\partial \vec{M}(u_0,v)}{\partial v}$ .

Pour qu'un point $A(x,y,z)$ de l'espace soit dans le plan tangent en $M(u_0,v_0)$ , il faut et il suffit que les vecteurs $\overrightarrow{M(u_0,v_0)A(x,y,z)}$ , $\frac{\partial \vec{M}(u,v_0)}{\partial u}$ et $\frac{\partial \vec{M}(u_0,v)}{\partial v}$ soient liés, c'est-à-dire que le déterminant de ces trois vecteurs soit nul. Ainsi , l'équation s'écrit :

$$det\left(M(u_0,v_0)\vec{A}(x,y,z),\frac{\partial \vec{M}(u,v_0)}{\partial u},\frac{\partial \vec{M}(u_0,v)}{\partial v}\right) = 0$$

ou encore $$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ \frac{\partial f(u,v_0)}{\partial u} & \frac{\partial g(u,v_0)}{\partial u} & \frac{\partial h(u,v_0)}{\partial u} \\ \frac{\partial f(u_0,v)}{\partial v} & \frac{\partial g(u_0,v)}{\partial v} & \frac{\partial h(u_0,v)}{\partial v} \end{vmatrix} = 0$$

Cette égalité est une équation du plan tangent.

## Cas particulier de plan tangent

Soit une application $\begin{matrix} h: I \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \to h(x,y) \end{matrix}$ définie et continûment dérivable sur un intervalle $I$ de $\mathbb{R}^2$ . Les équations $x=x$ , $y=y$ et $z=h(x,y)$ définissent une surface paramétrée $(S)$ dont son application dans $\mathbb{R}^3$ est de la forme $M(u,v)=(u,v,h(u,v))$ .

L'ensemble des points de la surface paramétrée est représenté par le graphe $h(u,v)$ .

Soit un point de coordonnées $(u_0,v_0)\in I$ ; les vecteurs $\frac{\partial \vec{M}(u,v_0)}{\partial u}$ et $\frac{\partial \vec{M}(u_0,v)}{\partial v}$ ont pour coordonnées au point $(u_0,v_0)\in I$ :

$\frac{\partial \vec{M}(u_0,v_0)}{\partial u}$ : $\left(1,0,\frac{\partial h(u_0,v_0)}{\partial u}\right)$

$\frac{\partial \vec{M}(u_0,v_0)}{\partial v}$ : $\left(0,1,\frac{\partial h(u_0,v_0)}{\partial v}\right)$

$$det = \begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-h(u_0,v_0) \\ 1 & 0 & \frac{\partial h(u_0,v_0)}{\partial u} \\ 0 & 1 & \frac{\partial h(u_0,v_0)}{\partial v} \end{vmatrix} = 0$$

En développant le déterminant par rapport à la première ligne, on obtient l'équation du plan tangent au point de coordonnées $(u_0,v_0)\in I$ .

$$(x-x_0)\frac{-\partial h(u_0,v_0)}{\partial u}-(y-y_0)\frac{\partial h(u_0,v_0)}{\partial v}+z-h(u_0,v_0)=0$$

Soit $$z=h(u_0,v_0)+(x-x_0)\frac{\partial h(u_0,v_0)}{\partial u}+(y-y_0)\frac{\partial h(u_0,v_0)}{\partial v}$$