Normes et distances

Table des matières

Ce document de mathématiques a été rédigé par Didier VERHILLE.

La valeur absolue sur un corps K est une application $\begin{array}{l}|\ |: K \to \mathbb{R}^+ \\ x \to |x|\end{array}$ telle que $\forall (x,y) \in K$, $|x| = \sqrt{x^2} \geqslant 0$, $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$, $|xy| = |x||y|$ et $|x+y| \leqslant |x| + |y|$.

Une telle application vérifie également les propriétés suivantes :

- L'expression $|y-x|$ est interprétée comme une distance sur K ;
- $Si\ \ |x|<1\ \ soit\ \ (-1<x<1)\ \ alors\ \ \forall n>1,\ x^n \to 0\ \ quand\ \ n \to 0$;
- Si $y \neq 0$ alors $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$;
- Et $|-x| = |x|$.

Sur $\mathbb{C}$, le module $|y-x|$ de la différence de deux nombres complexes $y = y_1 + i y_2$ et $x = x_1 + i x_2$ est la distance euclidienne des deux points (x_1, x_2) et (y_1, y_2) .

La norme est une extension de la valeur absolue des nombres réels ou complexes aux vecteurs. Elle mesure la longueur d'un vecteur. Si A et B sont deux points du plan ou de l'espace, la norme du vecteur $\vec{AB}$ est la longueur du segment $[AB]$. Elle se note à l'aide d'une double barre $\|AB\|$.

1 Normes

Soit E un K-espace vectoriel ($K-ev$) où K est un corps commutatif muni de la valeur absolue. On appelle norme sur E toute application $\begin{array}{l}\|\ \|: E \to \mathbb{R}^+ \\ \vec{x} \to \|\vec{x}\|\end{array}$ vérifiant les conditions suivantes :

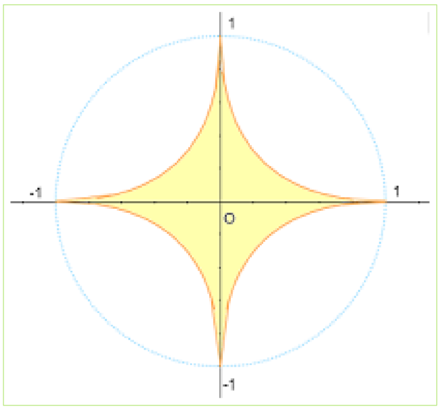
- $\|\vec{x}\| \geqslant 0,\ \forall \vec{x} \in E$, c'est la positivité de la norme ;
- $\|\vec{x}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = 0$, c'est l'axiome de séparation ;
- $\|\lambda \vec{x}\| = |\lambda| \|\vec{x}\|,\ \forall \lambda \in \mathbb{R}\ \ et\ \ \forall \vec{x} \in E$; $\|-\vec{x}\| = \|\vec{x}\|,\ \forall \vec{x} \in E$, c'est homogénéité ;

- $\|\vec{x}+\vec{y}\| \leqslant \|\vec{x}\|+\|\vec{y}\|,\ \forall(\vec{x},\vec{y})\in E^2$; $\|\vec{x}-\vec{y}\| \leqslant \|\vec{x}\|+\|\vec{y}\|,\ \forall(\vec{x},\vec{y})\in E^2$, c'est l'inégalité triangulaire.

La norme se note à l'aide d'une double barre $\|\ \|$ ou de la lettre $N()$.

Exemple

Montrons que la norme $N(x)$ du vecteur $\vec{x}(x_1,x_2)$, c'est à dire $N(x)=\|\vec{x}\|=(\sqrt{|x_1|}+\sqrt{|x_2|})^2$ n'est pas une norme sur le $\mathbb{R}-ev$ E .
La sphère des points de cette norme est $S=\{(x_1,x_2)\in R^2\ /\ (\sqrt{|x_1|}+\sqrt{|x_2|})^2\leqslant 1\}$. Les points $(1,0)$, $(0,1)$, $(-1,0)$ et $(0,-1)$ sont des éléments de S. Vérifions l'inégalité triangulaire, $\|\vec{x}+\vec{y}\| \leqslant \|\vec{x}\|+\|\vec{y}\|,\ \forall(\vec{x},\vec{y})\in E^2$, pour les points $(1,0)$ et $(0,1)$?
Après le calcul de la norme $\|(1,0)+(0,1)\|=\|(1,1)\|=4\ \geqslant\ \|(1,0)\|+\|(0,1)\|=2$, on constate que l'inégalité triangulaire n'est pas vérifiée pour la somme de ces deux points. $N(x)$ n'est pas une norme sur le $\mathbb{R}-ev$ E .
Dessinons la sphère des points (x_1,x_2) (en jaune) tels que $(\sqrt{|x_1|}+\sqrt{|x_2|})^2\leqslant 1$



Un $K-ev$ muni d'une norme s'appelle un $K-ev$ normé ($K-evn$).

Soit E un $K-ev$ muni d'une norme, alors la propriété suivante est vérifiée $\forall(x,y)\in E^{2,}\ |\ \|x\|-\|y\|\ |\leqslant\|x-y\|$.
En effet, $(\|x\|=\|x+y-y\|)\leqslant\|y\|+\|x-y\|$ d'où $\forall(x,y)\in E^{2,}\ |\ \|x\|-\|y\|\ |\leqslant\|x-y\|$

Quand $E=\mathbb{R}$, $x\rightarrow|x|$ est, en valeur absolue, une norme. Dans $\mathbb{R}$, la norme joue le même rôle que la valeur absolue d'un nombre réel.

➔ L'application $\begin{array}{c} N_1 : E=\mathbb{R}^3\rightarrow\mathbb{R} \\ \vec{(x)}\rightarrow N_1(\vec{x})=\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}\end{array}$ est une norme sur le $\mathbb{R}-ev$ E . C'est la norme euclidienne. Elle est obtenue à partir du produit scalaire $N_1(\vec{x})=\sqrt{\vec{(x)}.\vec{(x)}}=\sqrt{(\vec{x}|\vec{x})}=\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}$. Entre deux points A et B , de coordonnées respectives (x_A,y_A,z_A) et (x_B,y_B,z_B) , la norme euclidienne est définie par $N_1(\vec{AB})=\sqrt{(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2+(z_A-z_B)^2}$.

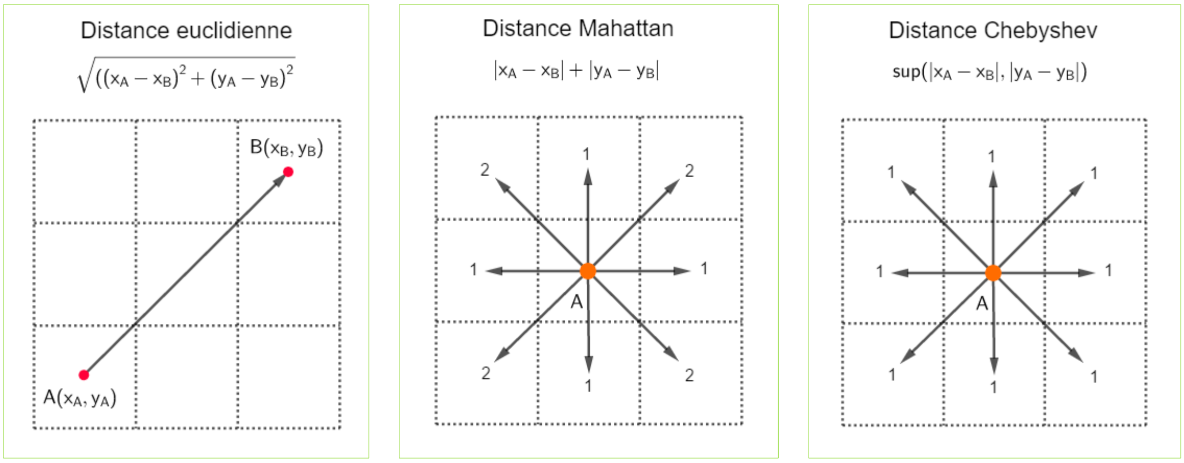
Cette norme a également les propriétés suivantes :

$\forall\vec{x}\in E,\ \forall\vec{y}\in E,\ \sqrt{(x_1+y_1)^2+(x_2+y_2)^2+(x_3+y_3)^2}\ \leqslant\ \sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}+\sqrt{y_1^2+y_2^2+y_3^2}$

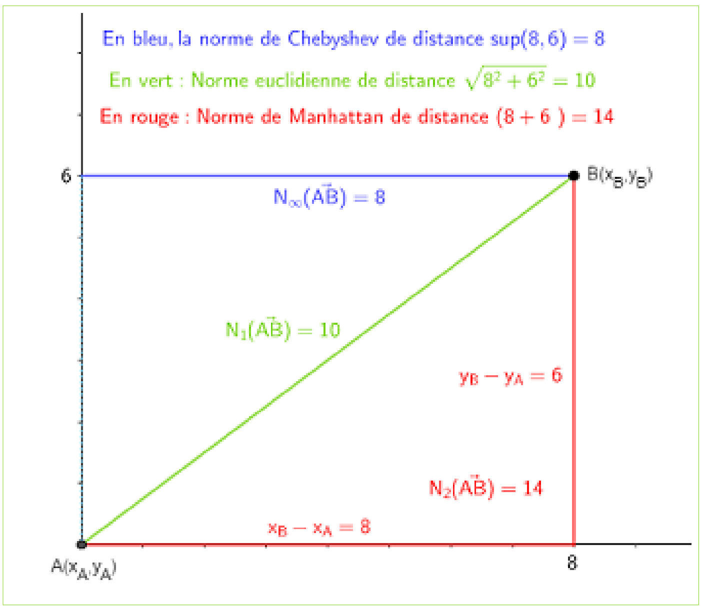
$\forall\vec{x}\in E,\ \forall\vec{y}\in E,\ (x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3)^2\ \leqslant\ (x_1^2+x_2^2+x_3^2)(y_1^2+y_2^2+y_3^2)$, cette inégalité s'appelle l'inégalité de Schwarz.

➔ L'application $\begin{array}{c} N_2 : \mathbb{R}^3\rightarrow\mathbb{R} \\ \vec{x}\rightarrow N_2(\vec{x})=|x_1|+|x_2|+|x_3|\end{array}$ est une norme sur le $\mathbb{R}-ev$ E . C'est la somme des modules ou des valeurs absolues. Elle induit la distance de déplacement à angle droit sur un damier. Cette norme est également appelée distance de Manhattan. Entre deux points A et B , de coordonnées respectives (x_A, y_A, z_A) et (x_B, y_B, z_B) , la distance de Manhattan est définie par la norme $N_2(\vec{AB}) = |x_A - x_B| + |y_A - y_B| + |z_A - z_B|$.

➔ L'application $\begin{matrix} N_3(ou\ N_\infty): \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \\ \vec{x} \to N_\infty(\vec{x}) = \sup(|x_1|, |x_2|, |x_3|) \end{matrix}$ est une norme sur le $\mathbb{R}-ev$ E . Elle est également appelée norme infinie. Elle induit la distance de déplacement par les faces et par les coins dans un réseau, comme celui du roi sur l'échiquier, dite distance de Tchebychev. Entre deux points A et B , de coordonnées respectives (x_A, y_A, z_A) et (x_B, y_B, z_B) , la distance de Tchebychev est définie par la norme $N_\infty(\vec{AB}) = \sup(|x_A - x_B|, |y_A - y_B|, |z_A - z_B|)$.



Comparaison graphique entre les trois normes



On constate que dans le plan $\mathbb{R}^2$ $N_\infty(\vec{AB}) \leqslant N_1(\vec{AB}) \leqslant N_2(\vec{AB}) \leqslant 2N_\infty(\vec{AB})$.

Normes équivalentes

Soit un $K-evn$ E que l'on muni de deux normes N et N' . On dit que ces deux normes N et N' sont équivalentes s'il existe deux constantes réelles strictement positives a et b telles que $\forall \vec{x} \in E,\ aN(\vec{x}) \leqslant N'(\vec{x}) \leqslant bN(\vec{x})$.
La relation « N' est équivalente à N ou encore $N \sim N'$ » est une relation d'équivalence sur l'ensemble des normes sur E .

Rappel : L'équivalence relie deux fonctions ou deux suites qui ont le même comportement au voisinage d'un point ou de l'infini. Par définition, On dit que u_n est équivalente à v_n , et on note $u_n \sim v_n$, si la suite $u_n - v_n$ est négligeable devant la suite v_n . En utilisant la notation petit o , ceci s'écrit : $u_n = v_n + o(v_n)$, et se traduit par l'existence d'un $\epsilon_n > 0$ qui tend vers zéro et vérifie $u_n = (1+\epsilon_n) v_n$ à partir d'un certain rang.

Théorème

Les trois normes usuelles N_1 , N_2 et N_∞ sont deux à deux équivalentes car elles vérifient la propriété : $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^3,\ p=3,\ N_\infty(\vec{x}) \leqslant N_1(\vec{x}) \leqslant N_2(\vec{x}) \leqslant p N_\infty(\vec{x})$.

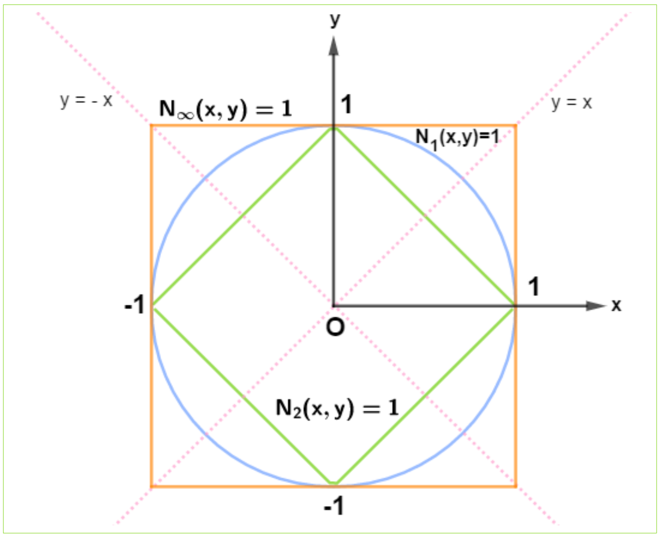
Exemple

Soient les sphères unités :

$$S_1 = \{\vec{x}(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \ / \ N_1(\vec{x}) = 1 \ \Leftrightarrow \ x_1^2 + x_2^2 = 1\}$$
$$S_2 = \{\vec{x}(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \ / \ N_2(\vec{x}) = 1 \ \Leftrightarrow \ |x_1| + |x_2| = 1\}$$
$$S_\infty = \{\vec{x}(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \ / \ N_\infty(\vec{x}) = N_3(\vec{x}) = 1 \ \Leftrightarrow \ \sup(|x_1|, |x_2|) = 1\}$$

Les sphères unités de $\mathbb{R}^2$ se notent respectivement $S_{1,}\ S_2\ et\ S_\infty$ et sont munies respectivement des normes $N_{1,}\ N_2\ et\ N_\infty$. $S_{1,}\ S_2\ et\ S_\infty$ sont symétriques par rapport au centre O car $N_1(-\vec{x}) = N_1(\vec{x})$, $N_2(-\vec{x}) = N_2(\vec{x})$, $N_\infty(-\vec{x}) = N_\infty(\vec{x})$.

Les trois sphères unités sont également symétriques par rapport aux droites d'équation $y = \pm x$ car l'égalité $N(x_1, x_2) = N(x_2, x_1)$ est vérifiée pour les trois normes.

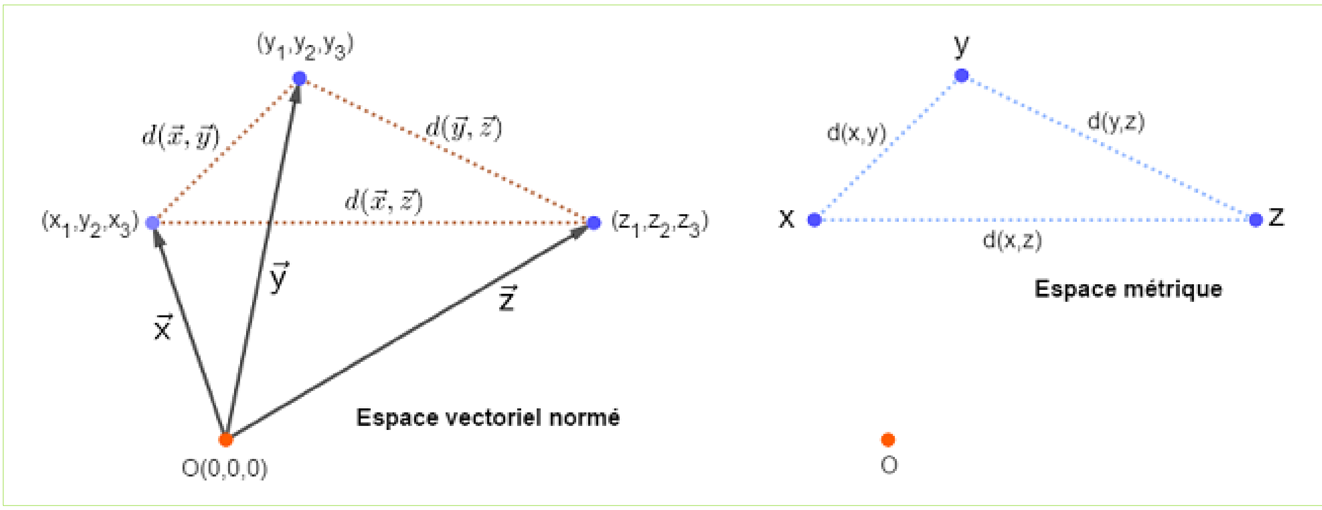


2 Distances

Soit E un ensemble. On appelle distance sur E toute fonction $\begin{matrix} d : E^2 \rightarrow \mathbb{R}^+ \\ (x,y) \rightarrow d(x,y) \end{matrix}$ vérifiant les conditions suivantes :

- $\forall (x,y) \in E^2,\ d(x,y) \geqslant 0$
- $d(x,y) = 0 \ \Leftrightarrow \ x = y$
- $\forall (x,y) \in E^2,\ d(x,y) = d(y,x)$, c'est la symétrie.
- $\forall (x,y) \in E^2,\ d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z)$, c'est inégalité triangulaire.

Cet ensemble $E \neq \emptyset$ muni d'une distance d s'appelle un espace métrique.
Si d_1 et d_2 sont des distances de E alors $d_1 + d_2$ l'est aussi.



Soit E un K-evn. On peut définir une distance d de E à partir de la norme suivante $\forall(\vec{x},\vec{y})\in E^2,\ d(\vec{x},\vec{y})=\|\vec{x}-\vec{y}\|$, alors :

$$\forall(\vec{x},\vec{y})\in E^2,\ d(\vec{x},\vec{y})=0 \Leftrightarrow \|\vec{x}-\vec{y}\|=0 \Leftrightarrow \vec{x}-\vec{y}=\vec{0} \Leftrightarrow \vec{x}=\vec{y}$$
$$\forall(\vec{x},\vec{y})\in E^2,\ d(\vec{y},\vec{x})=\|\vec{y}-\vec{x}\|=\|-(\vec{x}-\vec{y})\|=\|\vec{x}-\vec{y}\|=d(\vec{x},\vec{y})$$
$$\forall(\vec{x},\vec{y},\vec{z})\in E^3,\ d(\vec{x},\vec{z})=\|\vec{x}-\vec{z}\|=\|(\vec{x}-\vec{y})+(\vec{y}-\vec{z})\|\leqslant\|\vec{x}-\vec{y}\|+\|\vec{y}-\vec{z}\|=d(\vec{x},\vec{y})+d(\vec{y},\vec{z})$$

En particulier, soit deux vecteurs $\vec{x}(x_1,x_2,x_3)$ et $\vec{y}(y_1,y_2,y_3)$ dans $\mathbb{R}^3$. Les différentes distances N_1 , N_2 et N_∞ sont exprimées ainsi :

Pour la distance N_1 , $\begin{array}{c} d:\mathbb{R}^3 x\,\mathbb{R}^3\rightarrow\mathbb{R} \\ (\vec{x},\vec{y})\rightarrow d(\vec{x},\vec{y})=\|\vec{x}-\vec{y}\|=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+(x_3-y_3)^2}\end{array}$. La distance N_1 permet de généraliser l'application du théorème de Pythagore à un espace de dimension n. C'est la distance la plus intuitive.

Pour la distance N_2 , $\begin{array}{c} d:\mathbb{R}^3 x\,\mathbb{R}^3\rightarrow\mathbb{R} \\ (\vec{x},\vec{y})\rightarrow d(\vec{x},\vec{y})=\|\vec{x}-\vec{y}\|=|x_1-y_1|+|x_2-y_2|+|x_3-y_3|\end{array}$.

Pour la distance N_∞ , $\begin{array}{c} d:\mathbb{R}^3 x\,\mathbb{R}^3\rightarrow\mathbb{R} \\ (\vec{x},\vec{y})\rightarrow d(\vec{x},\vec{y})=\|\vec{x}-\vec{y}\|=\sup(|x_1-y_1|,|x_2-y_2|,|x_3-y_3|)\end{array}$.

Un K-evn est un espace métrique.

La distance d d'un espace métrique est invariante par translation $\forall(\vec{x},\vec{y},\vec{t})\in E^3,\ d(\vec{x}+\vec{t},\vec{y}+\vec{t})=d(\vec{x},\vec{y})$.

On a défini la distance à partir de la norme, mais on peut aussi définir la norme à partir de la distance en écrivant $\forall\vec{x}\in E,\ \|\vec{x}\|=d(\vec{x},0)$.

Distance entre deux ensembles

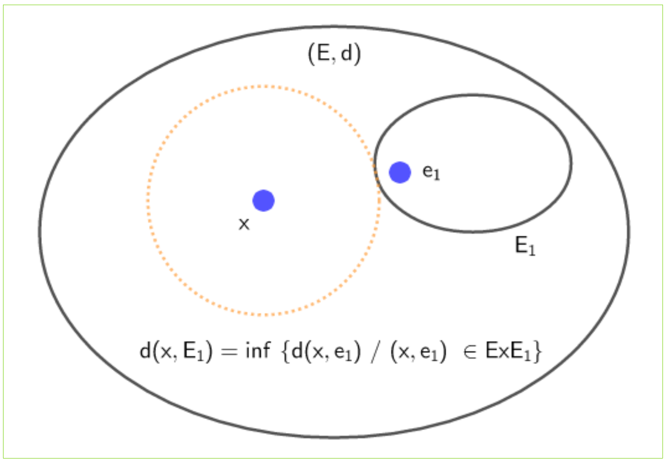
Soient E_1 et E_2 deux parties non vides d'un espace métrique E muni d'une distance d , on définit la distance entre ces deux ensembles comme $d(E_1,E_2)=inf\{d(x,y)\ /\ (x,y)\in E_1 x E_2\}$.

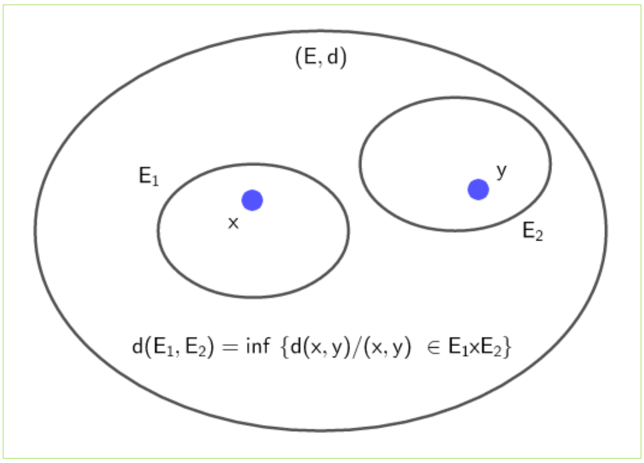
Distance d'un point à une partie

Si E_1 est une partie non vide d'un espace métrique E , et si x est un élément de E , on définit la distance de x à E_1 comme une borne inférieure $d(x,E_1)=inf\{d(x,e_1)\ /\ e_1\in E_1\}$.

C'est le rayon R de la plus grande boule ouverte de centre x qui ne rencontre pas E_1 ($B_o(x,R)=\{y \notin E_1 \ / \ \|y-x\|<R\}$).

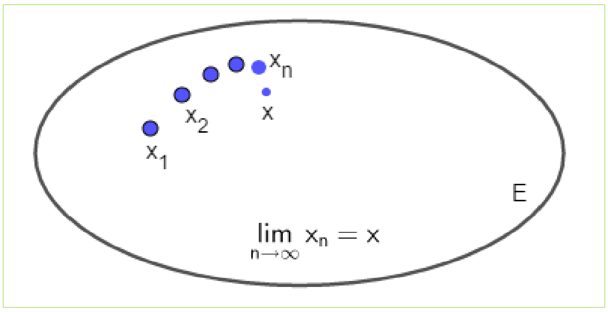
On prendra garde au fait que $d(x,E_1)=0$ n'implique pas en général que x soit élément de E_1 . Par exemple, dans $\mathbb{R}$ muni de la valeur absolue, la distance de 0 à l'intervalle ouvert $]0,1[$ est nulle.





3 Limite d’une suite de points dans un espace métrique

Soient une suite de points $x_n=(x_1,x_{2,..},x_n)$ de l’espace métrique E et une application $\begin{array}{c} d: ExE \to \mathbb{R} \\ (x_n,x) \to d(x_n,x) \end{array}$. On dit que la suite $x_n=(x_1,x_{2,..},x_n)$ tend vers x si $\forall \varepsilon>0, \ \exists N \in \mathbb{N}, \ n \geqslant N \ \Rightarrow \ d(x_n,x) \leqslant \varepsilon$. Cette limite s’écrit $\lim_{n\to\infty} x_n=x$.



Si l’espace métrique E vaut $\mathbb{R}$ et est muni de la distance $d(x,y)=|x-y|$, alors on retrouve bien la notion de limite usuelle.

La limite, si elle existe, est unique.

Suite de Cauchy

Soient une suite de points $x_n=(x_1,x_{2,..},x_m,..,x_n)$ de l’espace métrique E et l’application $\begin{array}{c} d: ExE \to \mathbb{R} \\ (x_m,x_n) \to d(x_m,x_n) \end{array}$. On dit que cette suite est une suite de Cauchy si $\forall \varepsilon>0, \ \exists N \in \mathbb{N}, \ m \geqslant N \ \text{et} \ n \geqslant N \ \Rightarrow \ d(x_m,x_n) \leqslant \varepsilon$.

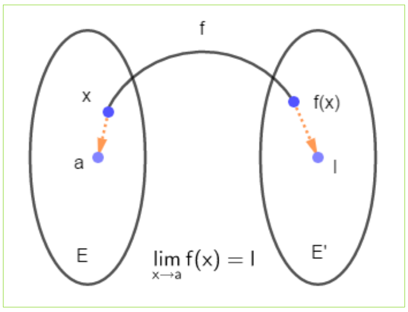
Si $\lim_{n\to\infty} x_n=x$ existe, cette suite est une suite de Cauchy, mais une suite de Cauchy n’a pas toujours une limite.

4 Limite d’une application

Soit l’application $\begin{array}{c} f: E \to E' \\ x \to f(x) \end{array}$;

Soient $a \in E \ \text{et} \ l \in E'$ alors $\forall \varepsilon>0, \ \exists \eta>0, \ d(x,a) \leqslant \eta \ \Rightarrow \ d(f(x),l) \leqslant \varepsilon$.

Cette limite s’écrit $\lim_{x \to a} f(x)=l$.
La distance d est à la fois la distance de E et de E' .



Si F est une partie de E et x reste dans F , la limite s’écrit $\lim_{x \to a, x \in F} f(x)=l$.

5 Notion de boule ou de sphère

Soit $(E, \| \|)$ un K-evn. Soient $x_0 \in E$ et $r \in]0,+\infty[$. La boule ouverte de centre x_0 et de rayon r est $B_o(x_0, r)=\{x \in E \ / \ \|x-x_0\| < r\}$.

Soit $(E, \| \|)$ un K-evn. Soient $x_0 \in E$ et $r \in [0,+\infty[$. La boule fermée de centre x_0 et de rayon r est $B_f(x_0, r)=\{x \in E \ / \ \|x-x_0\| \leqslant r\}$.

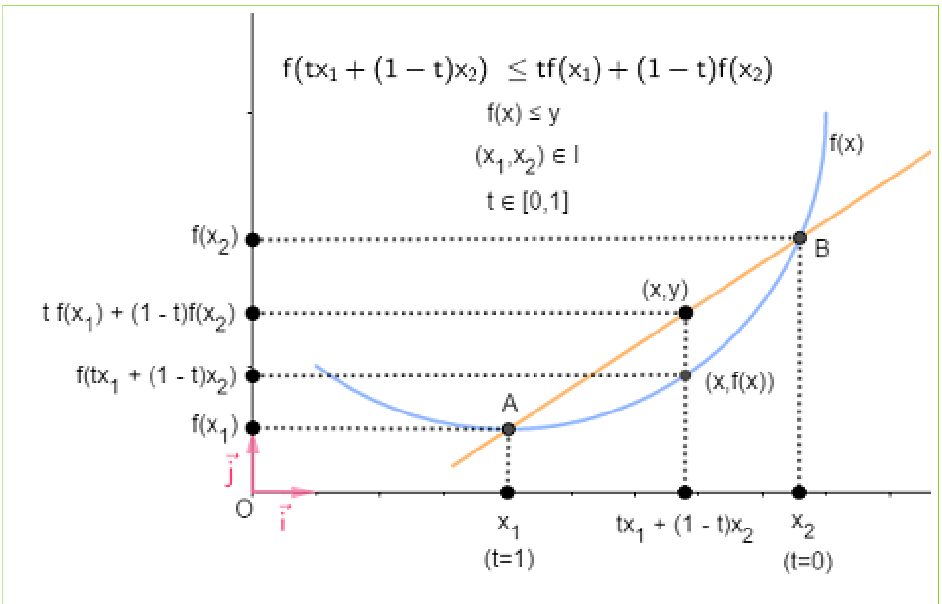
Soit $(E, \| \|)$ un K-evn. Soient $x_0 \in E$ et $r \in [0,+\infty[$. La sphère de centre x_0 et de rayon r est $S(x_0, r)=\{x \in E \ / \ \|x-x_0\| = r\}$.

Les boules d'un plan euclidien sont aussi appelées des disques.

Remarque : Toute boule ouverte (resp. fermée) est un convexe du K-ev E .

Rappel : Qu’est-ce qu’un convexe ?

Une fonction réelle $f(x)$ d'une variable réelle x définit sur I est dite convexe si pour les points sur $f(x)$, $A(x_1, f(x_1)) \ et \ B(x_2, f(x_2))$, le segment $[AB]$, appelé épigraphe de $f(x)$, noté $epi(f)$, est entièrement situé au-dessus du graphe $f(x)$.
L’épigraphe de l’application $\begin{matrix} f: I \to \mathbb{R} \\ x \to f(x) \end{matrix}$ vérifie $epi(f)=\{(x, y) \in [AB] \ / \ y \geqslant f(x)\}$.



Entre les abscisses x_1 et x_2 de l’axe $\vec{Ox}$, on a l’abscisse $x=t(x_2-x_1)$. Amener dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ de centre O , l’abscisse devient $x=x_2-t(x_2-x_1)=t x_1+(1-t)x_2$.

On dit que f est convexe sur I ssi l'épigraphe de f est un ensemble de $\mathbb{R}^2$ vérifiant la propriété $\forall (x,y) \in epi(f),\ \forall t \in [0,1],\ f(tx_1+(1-t)x_2) \leqslant t f(x_1)+(1-t) f(x_2)$, c'est à dire que $f(x) \leqslant y$.

On dit que f est concave sur I ssi $-f$ est convexe sur I , c'est à dire $\forall (x,y) \in epi(f),\ \forall t \in [0,1],\ f(tx_1+(1-t)x_2) \geqslant t f(x_1)+(1-t) f(x_2)$ ou encore $f(x) \geqslant y$.

6 Application continue d'un espace métrique dans un autre

Soient E et F deux espaces métriques ; soient l'application $\begin{matrix} f: E \to F \\ x \to f(x) \end{matrix}$ et le point $x_0 \in E$.

On dit que f est continue en x_0 si $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Autrement dit $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ d(x, x_0) \leqslant \eta \ \Rightarrow\ d(f(x), f(x_0)) \leqslant \varepsilon$.

On dit que f est continue dans E si elle est continue en tout point de E .

Soient $E,\ F\ et\ G$ trois espaces métriques ; si l'application $\begin{matrix} f: E \to F \\ x \to y = f(x) \end{matrix}$ et l'application $\begin{matrix} g: F \to G \\ y \to g(y) \end{matrix}$ sont des applications continues, alors l'application $\begin{matrix} g \circ f: E \to G \\ x \to g(f(x)) \end{matrix}$ est une application continue.